ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

MATHEMATIQUES

Lundi 18 mai 1998 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Option scientifique

EXERCICE 1

On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi définie pour tout entier $n > 0$ par :

$P(X_n = -1) = p \quad P(X_n = +1) = 1 - p$ où p est un réel tel que $0 < p < 1$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ par : $Z_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$

1 - On pose $\forall n \geq 1 \quad \begin{cases} a_n = P(Z_n = -1) \\ b_n = P(Z_n = +1) \end{cases}$

a) Calculer $a_n + b_n$.

b) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où Q est la matrice $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

2 - a) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$ où p_n est un réel tel que $0 < p_n < 1$ et donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

b) En déduire une expression explicite de p_n en fonction de n et p.

c) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Que peut - on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les variables Z_1 et Z_2 soient indépendantes.

On suppose cette condition réalisée : quelle est alors la loi de Z_n ?

Montrer que :

$$\forall n \geq 1 \quad P(Z_1 = \varepsilon_1, \ldots, Z_i = \varepsilon_i, \ldots, Z_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n} \quad \text{où } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ pour tout } i \ (1 \leq i \leq n)$$

Que peut - on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$?

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E, on associe la fonction F définie par :

$$x \to F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

1 - Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

2 - Déterminer F dans les cas suivants :

a) $x \to f(x) = \sin 2\pi x$;

b) $x \to f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3 - Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $f \to T(f) = F$

a) Montrer que T est linéaire.

b) Est-elle injective ? surjective ?

4 - On dit que le réel λ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ.

a) Montrer que 0 est valeur propre de T.

b) Montrer que pour tout réel a, la fonction $x \to e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.

c) Etudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T.

LES ANNALES

PROBLEME

L'objectif de ce problème est de "prolonger" la fonction factorielle $n \to (n-1)!$ définie sur $\mathbb{N}^*$ en une fonction définie sur les réels qui ne sont pas des entiers négatifs.
On étudie ensuite quelques propriétés de cette fonction.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls.
On pose $E = \mathbb{R} - \mathbb{Z}^-$: E est donc l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

LES ANNALES

Partie A

On considère une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f a la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} f \text{ est définie en } 1 \text{ et } f(1) = 1 \\ \forall x \in D \quad x+1 \in D \quad \text{et} \quad f(x+1) = x\, f(x) \end{cases}$$

1 - a) Montrer qu'une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut être définie en x entier négatif ou nul.

b) Montrer que si $D = \mathbb{N}^*$ $\quad n \to f(n) = (n-1)!$ a la propriété $\mathcal{P}$.

(On adopte la convention : $0! = 1$)

2 - a) On considère la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $x \to \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$

En utilisant, sans les démontrer, des résultats du cours, montrer que Γ a la propriété $\mathcal{P}$ et rappeler la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.

b) Montrer que pour tout x réel strictement positif et tout n entier strictement positif :

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1) \times \Gamma(x)$$

3 - Pour tout élément x de E et tout entier n tel que x+n soit strictement positif,

on pose : $A_n(x) = \dfrac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}$

a) Montrer que pour $x > 0$ et $n > 0$, $A_n(x)$ ne dépend pas de n.

b) Soit x un réel négatif non entier.

Montrer que x + n est strictement positif à partir d'un rang dépendant de x noté N_x.

Soient n et p deux entiers naturels. Pour n strictement supérieur à N_x, calculer

$A_{n+p}(x)$ en fonction de $A_p(x+n)$.

En déduire que : $\forall\, n > N_x \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad A_{n+p}(x) = A_n(x)$.

c) Le réel $A_n(x)$ étant indépendant de n pour $n > N_x$, on définit sur E une fonction $\tilde{\Gamma}$

par $\tilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$ pour $n > N_x$.

Montrer que la fonction $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $\mathcal{P}$, et que pour tout x réel strictement positif

$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$.

En déduire que : $\forall\, x \in E \qquad \tilde{\Gamma}(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)\,x\,\tilde{\Gamma}(x)$

On dit que $\tilde{\Gamma}$ prolonge la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par abus de notation, on notera désormais dans tout le problème simplement Γ et non

plus $\tilde{\Gamma}$, la fonction ainsi prolongée.

4 - a) On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\, dt$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} t \ln t \; e^{-t}\, dt$

Montrer que I et J sont des intégrales absolument convergentes.

b) Soit h la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par :

$$(t, x) \to h(t, x) = t^{x-1}$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \to u_t(x) = h(t, x)$,

montrer que :

$$\forall\, t \in\,]0, 1[\quad \forall\, x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\qquad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x-1| \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} \qquad (1)$$

et que : $$\forall\, t \in [1, +\infty[\quad \forall\, x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\qquad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x-1|\, t \ln t \qquad (2)$$

c) Montrer qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\qquad | \Gamma(x) - \Gamma(1) | \leq K | x - 1 | \qquad (3)$$

En déduire que la fonction Γ est continue au point 1.

5 - En utilisant la question précédente, montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

En déduire un équivalent simple de $\Gamma(x)$ au voisinage de $x = -n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

6 - On admet l'équivalence suivante :

$$\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x} \qquad (*)$$

a) Calculer pour x réel fixé $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.

b) Montrer que si x est un entier naturel n, l' équivalence (*) permet de retrouver la formule de Stirling : $\quad n! \underset{n \to +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

c) Montrer que : $\quad \forall x \in E \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x \Gamma(n)} = 1$

d) En déduire que : $\quad \forall x \in E \qquad \Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n! \, n^x}{x(x+1) \ldots (x+n)}$

Partie B

On se propose dans cette partie de donner une autre expression de la fonction Γ sur E.

1 - Pour n strictement positif, on pose $g_n(x) = \dfrac{e^{x/n}}{1+x/n}$ et $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} g_k(x)$.

Montrer que pour tout réel x positif, la série de terme général $u_n(x) = \ln g_n(x)$ est convergente.

En déduire, pour tout réel x positif, l'existence de $\lim_{n \to +\infty} G_n(x)$.

On appelle G (x) cette limite. On définit ainsi une fonction G sur $\mathbb{R}^+$.

2 - Montrer que la suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente pour x réel négatif non entier. (On remarquera que pour tout x fixé, $g_n(x)$ est strictement positif pour n suffisamment grand).

On a donc une fonction G définie sur E par : $x \to G(x) = \lim_{n\to+\infty} G_n(x)$.

3 - Vérifier que : $\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$ et retrouver le résultat suivant :

la suite de terme général $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$ a une limite finie strictement positive γ quand n tend vers $+\infty$. γ s'appelle la constante d'Euler.

(On pourra utiliser, en le justifiant, le résultat : $\forall x > 0 \quad e^x > x + 1$)

4 - Montrer que : $\forall x \in E \qquad G_n(x) = x\,\Gamma(x)\,\dfrac{n!\,\exp\left(x\sum_{k=1}^{n} 1/k\right)}{(x+n)\Gamma(x+n)}$.

5 - En utilisant la question A- 6-c), montrer que : $\forall x \in E \qquad \Gamma(x) = \dfrac{e^{-\gamma x}}{x}\,G(x)$.