CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
Toutes les variables aléatoires, considérées dans chaque partie de ce problème, sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace de probabilité (Ω, A, P).

Si X et Y sont des variables aléatoires admettant des moments d'ordre 1 et 2, $E(X)$ désigne l'espérance de X, $V(X)$ sa variance et $cov(X,Y)$ la covariance de X et de Y. On rappelle l'inégalité : $|cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$.

Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés A_1 , A_2 , .., A_n (par exemple des actions), disponibles sur le Marché Boursier. Les rendements à un an de ces actifs, exprimés <u>en pourcentage</u> , sont des variables aléatoires R_1 , R_2, .. , R_n admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple, si l'actif A_1 a rapporté 6%, R_1 prend la valeur 6.

Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est-à-dire un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tel que, pour tout i de $\{1,..,n\}$, x_i est un réel positif ou nul et tel que : $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chaque coefficient x_i représente la proportion du capital investie dans l'actif A_i. Par exemple, si n vaut 3 et si le gestionnaire investit un quart du capital dans l'actif A_1, la moitié du capital dans l'actif A_2 et le quart du capital dans l'actif A_3 , le portefeuille vaut $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un portefeuille donné, le rendement (en pourcentage) de ce portefeuille est la variable aléatoire : $R = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$.

Notre gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche pour cela les portefeuilles dont le rendement R est de variance minimale, sous certaines hypothèses.

LES ANNALES

Partie 1

Dans cette partie, n vaut 2 et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y.

1) On suppose que X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** telles que : $V(X)=2$, $V(Y)=4$.

a) Pour un réel a de $[0,1]$, on considère le portefeuille $(a,1-a)$ de rendement R. Calculer $V(R)$.

b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par : $h(x)=6x^2-8x+4$. En étudiant les variations de h sur $[0,1]$, montrer qu'il existe un unique portefeuille à déterminer dont le rendement est de variance minimale.

2) a) Soit N est un entier non nul et Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $[1,N]\cap\mathbb{N}$.

Donner la valeur de $E(Z)$ et calculer $V(Z)$. On rappelle : $\sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

On suppose que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi uniforme sur $[1,5]\cap\mathbb{N}$ et Y la loi uniforme sur $[1,7]\cap\mathbb{N}$.

b) Donner les valeurs de $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$.

c) Calculer $P(2X+Y\leq 8)$. On considère le portefeuille dont le rendement R_0 est de variance minimale. Calculer la probabilité que ce rendement R_0 soit supérieur ou égal à 3.

3) On suppose dans cette question que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre 2 et Y la loi de Poisson de paramètre 4.
Notre gestionnaire, toujours prudent, veut de plus constituer un portefeuille dont le rendement est en moyenne supérieur ou égal à 3.

a) Montrer que, parmi les portefeuilles dont le rendement R vérifie : $E(R)\geq 3$, celui dont le rendement est de variance minimale est $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. On note R_0 le rendement de ce portefeuille.

b) Calculer la probabilité que ce rendement R_0 soit supérieur ou égal à 3. On donne : $F_6(5)=0{,}45$, où F_6 est la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre 6.

Partie 2

Dans cette partie, n vaut 2 et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y.

1) On suppose que X et Y des variables aléatoires telles que : $V(X)=4$, $V(Y)=3$, $cov(X,Y)=c$, où c est un réel donné.

a) Montrer que l'on a : $|c|\leq 2\sqrt{3}$.

b) Pour un réel a de $[0,1]$, on considère le portefeuille $(a,1-a)$ de rendement R.

Montrer que l'on a : $V(R)=(7-2c)a^2+2(c-3)a+3$.

c) Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale. On déterminera ce portefeuille en fonction de c, en distinguant les deux cas : $c\in\left[-2\sqrt{3},3\right[$ et $c\in\left[3,2\sqrt{3}\right]$.

2) Dans cette question (X,Y) est un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi conjointe est donnée par :

$$P(X=0,Y=4)=\frac{1}{2},\quad P(X=4,Y=4)=P(X=4,Y=8)=\frac{1}{4}.$$

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
b) Calculer les valeurs de $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$, $cov(X,Y)$.
c) Déterminer le portefeuille de rendement de variance minimale. On note R_0 le rendement de ce portefeuille.
d) Calculer la probabilité que ce rendement R_0 soit supérieur ou égal à 3.

Partie 3

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z.
On suppose de plus : $V(X)=V(Y)=7$, $V(Z)=4$, $cov(X,Y)=1$, $cov(X,Z)=cov(Y,Z)=-4$.

1) La fonction F et l'ensemble H sont définis comme suit :
pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=7x^2+7y^2+4z^2+2xy-8xz-8yz$, $H=\{\ (x,y,z)\in(\mathbb{R}^+)^3\ ,\ x+y+z=1\ \}$.
On considère le rendement $R=xX+yY+zZ$. Montrer : $V(R)=F(x,y,z)$.

2) Notre gestionnaire, cherchant à constituer un portefeuille de rendement de variance minimale, veut déterminer le minimum (s'il existe) de la fonction F sur l'ensemble H.

a) La fonction f et l'ensemble K sont définis comme suit :
pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=19x^2+19y^2+26xy-16x-16y+4$, $K=\{\ (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2\ ,\ x+y\leq 1\ \}$.
Montrer que le problème du gestionnaire équivaut à déterminer le minimum (s'il existe) de f sur K.

b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ atteint au point (x_0,y_0) que l'on déterminera. Calculer $f(x_0,y_0)$.

d) En déduire qu'il existe un portefeuille à déterminer de rendement de variance minimale.

e) Montrer : pour tous réels x, y et z, $F(x,y,z)=3(x-y)^2+4(x+y-z)^2$, et retrouver le résultat du d).

Partie 4

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1, A_2 et A_3 sont notés respectivement X, Y et Z.

1) On suppose : $V(X)=V(Y)=V(Z)=1$, $cov(X,Y)=cov(X,Z)=cov(Y,Z)=c$, où c est un réel donné.

On considère la matrice à coefficients réels d'ordre 3 : $M=\begin{pmatrix}1 & c & c\\ c & 1 & c\\ c & c & 1\end{pmatrix}$.

a) On note $M_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles ayant 3 lignes et 1 colonne. On considère un élément de $M_{3,1}(\mathbb{R})$: $U=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et la variable aléatoire : $T=xX+yY+zZ$.

Montrer que l'on a : $V(T)={}^tU\,M\,U$, où ${}^tU$ désigne la transposée de U.

b) Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. (On distinguera les cas : $c=0$ et $c\neq 0$).

d) En déduire : $c\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

e) On suppose : $c\neq 1$. On considère le portefeuille (x,y,z) de rendement R.

Montrer que l'on a : $V(R)=(1-c)\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\right]+\frac{1+2c}{3}$.

En déduire qu'il existe un unique portefeuille à déterminer de rendement de variance minimale.

2) On suppose dans cette question que X, Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$.

a) Montrer que le portefeuille de rendement de variance minimale est $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Déterminer la variance de ce rendement.

b) Quelle est la loi de $X+Y+Z$? En déduire, à l'aide de la loi normale, une approximation de la probabilité que le rendement R du portefeuille ci-dessus soit supérieur ou égal à 4. On donne : $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) = 0{,}86$, où Φ est le fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

LES ANNALES

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1998

HEC-ESCP-LYON : MATH II

CORRIGE

PARTIE–I

QUESTION–1

1–a)

$R = aX + (1-a)Y$. Les variables X et Y sont indépendantes, donc les variables aX et $(1-a)Y$ le sont aussi.

$$\begin{aligned} V(R) &= a^2V(X) + (1-a)^2V(Y) \\ &= 2a^2 + 4(1-a)^2 \\ &= 6a^2 - 8a + 4. \end{aligned}$$

1–b)

$h'(x) = 12x - 8 = 4(3x-2)$. Le tableau de variations de h est

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	4	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2

h admet un minimum absolu pour $x = \frac{2}{3}$.

Il y a un seul portefeuille dont le rendement est à variance minimale ; c'est $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

QUESTION–2

2–a)

C'est du cours : $\boxed{E(Z) = \frac{N+1}{2} \ ; \ V(Z) = \frac{N^2-1}{12}.}$

Mais on demande de calculer $V(Z)$: calculons.

$$
\begin{aligned}
E(Z^2) &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} k^2 \\
&= \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} \\
V(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\
&= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} \\
&= \frac{2(N+1)(2N+1) - 3(N+1)^2}{12} = \frac{4N^2+6N+2-3N^2-6N-3}{12} \\
&= \frac{N^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

2–b)

X suit la loi uniforme sur $[\![1,5]\!]$; $E(X)=3$, $V(X)=2$.
Y suit la loi uniforme sur $[\![1,7]\!]$; $E(X)=4$, $V(X)=4$.

2–c)

$$(2X+Y \leq 8) = \bigcup_{k=3}^{8}(2X+Y=k)$$

C'est une **réunion d'événements deux à deux incompatibles**.

$$p(2X+Y \leq 8) = \sum_{k=3}^{8} p(2X+Y=k)$$

$p(2X+Y=3) = p(X=1, Y=1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{35}$
par indépendance;
$p(2X+Y=4) = p(X=1, Y=2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{35}$
par indépendance ;
$p(2X+Y=5) = p((X=1, Y=3) \cup (X=2, Y=1)) = \frac{1}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{35}$
par incompatibilité ;
$p(2X+Y=6) = p((X=1, Y=4) \cup (X=2, Y=2)) = \frac{1}{35} + \frac{1}{35} = \frac{2}{35}$
par incompatibilité ;
$p(2X+Y=7) = p(X=1, Y=5) + p(X=2, Y=3) + p(X=3, Y=1)$
$= \frac{3}{35}$ **par incompatibilité deux à deux** ;
$p(2X+Y=8) = p(X=1, Y=6) + p(X=2, Y=4) + p(X=3, Y=2)$
$= \frac{3}{35}$ **par incompatibilité deux à deux** ;

$$\boxed{p(2X+Y \leq 8) = \sum_{k=3}^{8} p(2X+Y=k) = \frac{12}{35}.}$$

Le rendement de variance minimale est : $R_0 = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y$ d'après 1–a).

$$
\begin{aligned}
p(R_0 \geq 3) &= p(\tfrac{2}{3}X + \tfrac{1}{3}Y \geq 3) \\
&= p(2X+Y \geq 9) = 1 - p(2X+Y \leq 8) \\
&= 1 - \frac{12}{35}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{p(R_0 \geq 3) = \frac{23}{35}.}$$

QUESTION–3

3–a)

$$\begin{aligned} R &= aX + (1-a)Y \\ E(R) &= aE(X) + (1-a)E(Y) = 2a + 4(1-a) = 4 - 2a. \\ E(R) \geq 3 &\iff 4 - 2a \geq 3 \iff a \leq \frac{1}{2}. \\ V(R) &= a^2V(X) + (1-a)^2V(Y) = 2a^2 + 4(1-a)^2 \\ &\quad (\textbf{par indépendance des variables } aX \textbf{ et } (1-a)Y\ ) \\ V(R) &= h(a). \end{aligned}$$

D'après le tableau de variations de h, h est décroissante sur $[0, \frac{2}{3}]$, donc sur $[0, \frac{1}{2}]$, puisque $\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}$.

h admet donc sur $[0, \frac{1}{2}]$ un minimum absolu en $x = \frac{1}{2}$.

> Il y a un seul portefeuille dont le rendement R est à variance minimale et vérifie R / $E(R) \geq 3$. C'est
> $$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

3–b)

$p(R_0 \geq 3) = p(X + Y \geq 6)$ Or X **et** Y **sont deux variables de Poisson indépendantes, donc** $X + Y$ **suit la loi de Poisson de paramètre** $2 + 4 = 6$.

$$p(X+Y \geq 6) = \sum_{n=6}^{+\infty} e^{-6}\frac{6^n}{n!} = 1 - p(X+Y \leq 5) = 1 - F_6(5).$$

$$\boxed{p(X+Y \geq 6) = 0,55.}$$

PARTIE–II

QUESTION–1

1–a)

On sait que $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X) \times V(Y)}$ **dans tous les cas de figure.**

Au cas où le lecteur ignorerait ce résultat, rétablissons le dans le cas général où $V(Y)$ (ou $V(X)$) est non nulle, par exemple $V(Y)$ est non nulle.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ V(X + \lambda Y) \geq 0$, puisque c'est une variance.

Or $V(X + \lambda Y) = \lambda^2 V(Y) + 2\lambda\,\mathrm{cov}(X,Y) + V(X)$.

C'est un trinôme en λ, toujours positif, c'est-à-dire du signe du coefficient de λ^2 : ce trinôme a donc au plus une racine réelle, c'est dire que son discriminant est négatif ou nul.

$$\Delta = 4\Big(\mathrm{cov}(X,Y))^2 - V(X)V(Y)\Big) \leq 0 \quad \iff (\mathrm{cov}(X,Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$

On peut prendre la racine carrée : les nombres sont positifs ou nuls ;

$$\begin{aligned}(\mathrm{cov}(X,Y))^2 - V(X)V(Y) \le 0 \quad &\Longleftrightarrow \sqrt{(\mathrm{cov}(X,Y))^2} \le \sqrt{V(X)V(Y)}\\ &\Longleftrightarrow |(\mathrm{cov}(X,Y))| \le \sqrt{V(X)V(Y)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc, ici, } |c| \le \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.}$$

1–b)

$$\begin{aligned} R &= aX + (1-a)Y\\ V(R) &= a^2V(X) + (1-a)^2V(Y) + 2a(1-a)\,\mathrm{cov}(X,Y)\\ &= 4a^2 + 3(1-a)^2 + 2ca(1-a)\\ &= 7a^2 - 6a + 3 - 2ca^2 + 2ca.\end{aligned}$$

$$\boxed{V(R) = (7-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3.}$$

1–c)

Posons $h(a) = (7-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$.

$h'(a) = 2a(7-2c) + 2(c-3) = 2((7-2c)a + c - 3)$.

$$\begin{aligned}|c| \le 2\sqrt{3} \quad &\Longleftrightarrow -2\sqrt{3} \le c \le 2\sqrt{3}\\ &\Longleftrightarrow -4\sqrt{3} \le 2c \le 4\sqrt{3} \quad \text{car } 2 > 0\end{aligned}$$

Or $4\sqrt{3} < 7$, car $16 \times 3 < 49$. Donc $2c < 4\sqrt{3} < 7$.

Il s'ensuit que $7 - 2c > 0$

$h'(a) = 0 \Longleftrightarrow a = \dfrac{c-3}{2c-7}$. **Il s'agit de savoir si** $\dfrac{c-3}{2c-7} \in [0,1]$.

- Si $c > 3$, $\dfrac{c-3}{2c-7} < 0$ car $c - 3 > 0$ et $2c - 7 < 0$; donc $\dfrac{c-3}{2c-7} \notin [0;1]$.
- Si $c \le 3$, $\dfrac{c-3}{2c-7} \ge 0$; comparons $\dfrac{c-3}{2c-7}$ à 1.

$$\begin{aligned}\frac{c-3}{2c-7} - 1 \quad &= \frac{c-3-(2c-7)}{2c-7}\\ &= \frac{4-c}{2c-7} = \frac{c-4}{7-2c} < 0.\end{aligned}$$

Car $c \le 3 \Longrightarrow c - 4 < 0$. Or $7 - 2c > 0$,

donc $a_0 = \dfrac{c-3}{2c-7} \in [0,1]$**.**

Il y a deux tableaux de variations différents :

- $c \in [3; 2\sqrt{3}]$. (h est strictement croissante).

a	0		1
$h(a)$	3	$\nearrow$	4

Le minimum est obtenu pour $a = 0$; donc $1 - a = 1$.

- $c \in [-2\sqrt{3}; 3]$.

$$\begin{aligned}h'(a) \ge 0 \quad &\Longleftrightarrow (7-2c)a + c - 3 \ge 0\\ &\Longleftrightarrow a \ge \frac{3-c}{7-2c} \;\; (\text{ car } 7 - 2c > 0)\\ &\Longleftrightarrow a \ge a_0.\end{aligned}$$

a	0		$\dfrac{3-c}{7-2c}$		1
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$	3	$\searrow$	m_c	$\nearrow$	4

Le minimum est obtenu pour $a_0 = \dfrac{3-c}{7-2c}$; $1 - a_0 = \dfrac{c-4}{2c-7}$.

En résumé :

Pour $c\ /\ 3 \leq c \leq 2\sqrt{3}$, le portefeuille dont le rendement est de variance minimale est $(0,1)$. Son rendement est $R_0 = Y$.

Pour $c\ /\ -2\sqrt{3} \leq c \leq 3$, c'est $(\frac{c-3}{2c-7}, \frac{c-4}{2c-7})$.

QUESTION–2

2–a)

On a facilement, sous-forme de tableau, la loi du couple. A l'intersection de la ligne numéro i et de la colonne numéro j se trouve $p(X = i, Y = j)$.

$Y \setminus X$	0	4
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
8	0	$\frac{1}{4}$

On obtient les lois de X et de Y comme lois marginales, c'est à dire que :

$\forall i \in X(\Omega),\ p(X = i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} p(X = i, Y = j)$.

$\forall j \in Y(\Omega),\ p(Y = j) = \sum_{i \in X(\Omega)} p(X = i, Y = j)$.

Un calcul très simple donne :

X suit la loi uniforme sur $\{0, 4\}$.

$Y(\Omega) = \{4, 8\}$; $p(Y = 4) = \frac{3}{4}$, $p(Y = 8) = \frac{1}{4}$.

2–b)

Les calculs sont simples ; ils donnent :

$E(X) = 2,\ V(X) = 4$; $E(Y) = 5,\ V(Y) = 3$;

$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - 10 = \dfrac{16 + 32}{4} - 10 = 2.$

En effet, rappelons que $E(XY) = \sum_{\substack{i \in \{0,4\} \\ j \in \{4,8\}}} i \times j \times p(X = i, Y = j)$.

Dans notre cas, il ne reste pour $i \times j \neq 0$ que les produits $4 \times 4 = 16$ et $4 \times 8 = 32$ avec les probabilités respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$

$E(XY) = \dfrac{16 + 32}{4} = 12.$

2–c)

Nous sommes dans les conditions de la première question avec

$\text{cov}(X, Y) = 2 \in [-2\sqrt{3}, 3]$.

Le rendement à variance minimale est obtenu pour le portefeuille $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Son rendement est $R_0 = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}Y$.

2–d)

$$\begin{aligned} p(R_0 \geq 3) &= p(\tfrac{1}{3}X + \tfrac{2}{3}Y \geq 3) \\ &= p(X + 2Y \geq 9) \\ &= p((X+2Y=12) \cup (X+2Y=20)) \end{aligned}$$

union d'événements incompatibles.

On vérifie sans peine, avec le tableau du couple (X, Y), que $X + 2Y$ ne peut prendre au plus que les valeurs $8, 12, 16, 20$.

Voir ci-dessous le tableau du couple $(X, 2Y)$:

$2Y \setminus X$	0	4
8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
16	0	$\frac{1}{4}$

Or $(X = 0, Y = 16)$ est impossible, donc $(X + 2Y)(\Omega) = \{8, 12, 20\}$.

$$\begin{aligned} p(X+2Y \geq 9) &= p(X+2Y=12) + p(X+2Y=20) \\ &= p(X=4, Y=4) + p(X=4, Y=8) \\ &= p(X=4). \end{aligned}$$

$$\boxed{p(R_0 \geq 3) = \frac{1}{2}.}$$

PARTIE–III

QUESTION–1

$$\begin{aligned} R &= xX + yY + zZ \\ V(R) &= x^2V(X) + y^2V(Y) + z^2V(Z) + 2xy\,\mathrm{cov}(X,Y) + 2xz\,\mathrm{cov}(X,Z) + \\ &\quad 2yz\,\mathrm{cov}(Y,Z). \end{aligned}$$

$$\boxed{V(R) = 7x^2 + 7y^2 + 4z^2 + 2xy - 8xz - 8yz.}$$

QUESTION–2

2–a)

Sur H, $z = 1 - x - y$. Donc sur H,

$$\begin{aligned} V(R) &= 7x^2 + 7y^2 + 4(1-x-y)^2 + 2xy - 8(x+y)(1-x-y) \\ V(R) &= 7x^2 + 7y^2 + 4(1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy) + 2xy \\ &\qquad -8(x+y) + 8(x+y)^2 \\ &= 11x^2 + 11y^2 + 4 - 8x - 8y + 10xy - 8x - 8y + 8(x^2 + y^2 + 2xy) \\ &= 19x^2 + 19y^2 + 26xy - 16x - 16y + 4. \end{aligned}$$

Or $z = 1 - x - y$ d'une part ; d'autre part $z \geq 0$, donc $1 - x - y \geq 0$, soit $x + y \leq 1$. Or $(x, y, z) \in H$, donc $x \geq 0, y \geq 0$; on obtient donc les conditions : $x \geq 0, y \geq 0$, $x + y \leq 1$, soit finalement $\boxed{(x, y) \in K.}$

> $\forall (x, y) \in K,\ V(R) = f(x, y).$
>
> Déterminer un portefeuille dont le rendement est de variance minimale revient donc à minimiser f sur K.

2–b)

Utilisons les notations de Monge.

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 38x + 26y - 16 \\ q(x,y) &= 38y + 26x - 16. \end{aligned}$$

2–c)

Recherche d'extrema éventuels sur $\mathbb{R}^2$, qui est une partie ouverte.

Si on en trouve, on regardera s'ils sont dans K ou non.

- Recherche des points critiques.

Les points critiques (x, y) sont solutions de : $p(x,y) = q(x,y) = 0$, soit

$$\begin{cases} p(x,y) &= 0 \\ q(x,y) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 19x + 13y &= 8 \quad L_1 \longleftarrow \dfrac{L_1 + L_2}{32} \\ 13x + 19y &= 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y &= \frac{1}{2} \\ 13x + 19y &= 8 \quad L_2 \longleftarrow L_2 - 13L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y &= \frac{1}{2} \\ 6y &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \frac{1}{4} \\ y &= \frac{1}{4}. \end{cases}$$

- Recherche des extrema.

Pour $(x, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$,

$$\begin{aligned} r(x,y) = r &= 38 \\ s(x,y) = s &= 26 \\ t(x,y) = t &= 38. \end{aligned}$$

Remarque : La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc d'après le **théorème de Schwarz** $s(x,y)$ existe.

$s^2 - rt = (13 \times 2)^2 - (2 \times 19)^2 = 4(169 - 361) < 0.$

f admet un extremum en $(x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, qui est bien dans K.
De plus $r > 0$, c'est donc un minimum.

$$f(x_0, y_0) = \frac{19}{8} + \frac{26}{16} - \frac{16}{2} + 4 = 0.$$

2–d)

D'après ce qui a été dit dans le b), le point en lequel il y a minimum est le portefeuille cherché, car $(x_0, y_0) \in H$.

Il existe un portefeuille dont le rendement est de variance minimale, c'est ;

$$(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}), \text{ soit } R_0 = \tfrac{1}{4}X + \tfrac{1}{4}Y + \tfrac{1}{2}Z.$$

2–e)

Il suffit de développer $3(x-y)^2+4(x+y-z)^2$.

$F(x,y,z)\geq 0$. donc elle admettra un minimum s'il existe un point $(x,y,z)\ /\ F(x,y,z)=0$. Comme $F(x,y,z)$ est la somme de deux termes positifs ou nuls, cette quantité sera nulle si et seulement si les deux termes sont nuls. Sur H (où $x\geq 0$ et $y\geq 0$) cela donne donc le système :

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y & =0 \\ x+y-z & =0 \\ x+y+z & =1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =y \\ 2x & =z \\ 2x+z & =1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ll} x & =y \\ 2x & =z \\ 2z & =1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ll} z & =\dfrac{1}{2} \\ x=y & =\dfrac{z}{2}=\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{On retrouve le résultat précédent.}}$$

PARTIE–IV

QUESTION–1

1–a)

$$\begin{aligned} {}^tUMU &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+c(y+z) \\ c(x+z)+y \\ c(x+y)+z \end{pmatrix} \\ &= x^2+y^2+z^2+2c(xy+xz+yz). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(T) &= x^2V(X)+y^2V(Y)+z^2V(Z)+2xy\,\mathrm{cov}(X,Y)+2xz\,\mathrm{cov}(X,Z)+ \\ &\qquad 2yz\,\mathrm{cov}(Y,Z) \\ &= x^2+y^2+z^2+2xyc+2xzc+2yzc. \end{aligned}$$

$$\boxed{V(T)={}^tUMU.}$$

1–b)

M est symétrique réelle, donc diagonalisable.

$$\boxed{\text{Recherche des valeurs propres de } M.}$$

Soit λ une valeur propre de M et U un vecteur propre associé.

${}^tUMU={}^tU(MU)={}^tU(\lambda U)=\lambda{}^tUU=\lambda(x^2+y^2+z^2)$.

Or ${}^tUMU=V(T)\geq 0$, donc $\lambda(x^2+y^2+z^2)\geq 0$.

Comme $x^2+y^2+z^2>0$, puisque $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ $\left(U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right.$ est un vecteur propre$\Big)$,

on conclut que $\boxed{\lambda\geq 0.}$

1–c)

λ est valeur propre de M si et seulement si la matrice $M-\lambda I$ n'est pas inversible.

- $\boxed{\text{Supposons } c \neq 0}$

$$M-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & c & c \\ c & 1-\lambda & c \\ c & c & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftrightarrow L_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} c & c & 1-\lambda \\ c & 1-\lambda & c \\ 1-\lambda & c & c \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow cL_3 + (\lambda-1)L_1 \ (c \neq 0) \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} c & c & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda-c & c-1+\lambda \\ 0 & c^2+c(\lambda-1) & c^2-(\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c & c & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda-c & c-1+\lambda \\ 0 & -c(1-\lambda-c) & (c-\lambda+1)(c+\lambda-1) \end{pmatrix} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + cL_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} c & c & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda-c & c-1+\lambda \\ 0 & 0 & (c+\lambda-1)(2c-\lambda+1) \end{pmatrix}.$$

La matrice est triangulaire supérieure ; elle n'est pas inversible si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul.
λ est valeur propre si et seulement si $\lambda = 1-c$ ou $\lambda = 1+2c$.

Remarque : Comme $c \neq 0$, ces valeurs sont distinctes.

- $\boxed{\text{Supposons } c = 0}$

$M = I_3$; elle n'admet que $\lambda = 1$ comme valeur propre.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } c=0, \text{ il y a une seule valeur propre } \lambda = 1. \\ \text{Si } c \neq 0, \text{ il y a deux valeurs propres } \lambda = 1-c \text{ et } \lambda = 1+2c. \end{array}}$$

$\boxed{\text{Recherche des sous-espaces propres de } M.}$

Si $c=0$, la matrice $M = I_3$ est diagonalisée ; il y a un seul sous-espace propre : $\mathbb{R}^3$.
Si $c \neq 0$, notons E_λ le sous-espace associé à la valeur propre λ.

$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_\lambda$ si et seulement si (x,y,z) est solution de

$$\begin{pmatrix} c & c & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda-c & c-1+\lambda \\ 0 & 0 & (c+\lambda-1)(2c-\lambda+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\begin{cases} cx + cy + (1-\lambda)z & = 0 \\ (1-\lambda-c)y + (c-1+\lambda)z & = 0 \\ (c+\lambda-1)(2c-\lambda+1)z & = 0. \end{cases}$$

Détermination de E_{1-c}.

Pour $\lambda = 1-c$, le système précédent équivaut successivement à :

$$\begin{cases} cx+cy+cz &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \; ; \; c(x+y+z)=0 \; ; \; x+y+z=0 \quad \text{car } c \neq 0$$

$$\begin{aligned} E_{1-c} &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; / \; z=-x-y \right\} \\ &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \; / \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

$$E_{1-c} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Détermination de E_{1+2c}.

Pour $\lambda = 1+2c$, le système précédent équivaut successivement à :

$$\begin{cases} cx+cy-2cz &= 0 \\ -3cy+3cz &= 0 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} c(x+y-2z) &= 0 \\ c(y-z) &= 0 \end{cases}$$

$$; \; \begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \quad \text{car } c \neq 0$$

$$; \quad x=y=z.$$

$$\begin{aligned} E_{1+2c} &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; / \; x=y=z \right\} \\ &= \left\{ U = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \; / \; x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

$$E_{1+2c} = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1–d)

$$\begin{aligned} \lambda \geq 0 &\iff \begin{cases} 1-c \geq 0 \\ 1+2c \geq 0 \end{cases} \\ &\iff -\frac{1}{2} \leq c \leq 1. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{c \in [-\frac{1}{2}, 1].}$

1–e)

$$\begin{aligned} V(R) &= x^2+y^2+z^2+2c(xy+yz+zx) \quad \text{avec } x+y+z=1 \text{ d'après 1–a)} \\ &= x^2+y^2+z^2+c(xy+yz+yz+zx+zx+xy) \\ &= x^2+y^2+z^2+c(y(x+z)+z(y+x)+x(z+y)) \\ &= x^2+y^2+z^2+c(y(1-y)+z(1-z)+x(1-x)) \\ &= x^2+y^2+z^2+c\Big(\underbrace{(x+y+z)}_{=1}-(x^2+y^2+z^2)\Big) \\ &= (1-c)(x^2+y^2+z^2)+c \\ &= (1-c)\Big((x-\tfrac{1}{3})^2+(y-\tfrac{1}{3})^2+(z-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}\underbrace{(x+y+z)}_{=1}-\tfrac{3}{9}\Big)+c \\ &= (1-c)\Big((x-\tfrac{1}{3})^2+(y-\tfrac{1}{3})^2+(z-\tfrac{1}{3})^2\Big)+\tfrac{1}{3}(1-c)+c. \end{aligned}$$

$$\boxed{V(R) = (1-c)\Big((x-\tfrac{1}{3})^2+(y-\tfrac{1}{3})^2+(z-\tfrac{1}{3})^2\Big)+\frac{1+2c}{3}.}$$

$V(R) - \dfrac{1+2c}{3} = (1-c)\Big((x-\frac{1}{3})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 + (z-\frac{1}{3})^2\Big) \geq 0$, car $c < 1$ et $(x-\frac{1}{3})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 + (z-\frac{1}{3})^2 \geq 0$.

Donc $V(R) \geq \dfrac{1+2c}{3}$.

$V(R)$ sera minimum si et seulement si $(x-\frac{1}{3})^2 + (y-\frac{1}{3})^2 + (z-\frac{1}{3})^2 = 0$, ce qui équivaut à $(x-\frac{1}{3})^2 = (y-\frac{1}{3})^2 = (z-\frac{1}{3})^2 = 0$, donc à $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

> Il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale ;
> c'est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; il correspond à $R_0 = \frac{1}{3}(X+Y+Z)$.

QUESTION–2

2–a)

$E(X) = E(Y) = E(Z) = 5$ et $V(X) = V(Y) = V(Z) = \frac{5}{2}$.

Pour utiliser les résultats précédents, considérons

$X' = \sqrt{\frac{2}{5}}X,\ Y' = \sqrt{\frac{2}{5}}Y,\ Z' = \sqrt{\frac{2}{5}}Z$.

Alors $E(X') = E(Y') = E(Z') = \sqrt{\frac{2}{5}}E(X) = 5\sqrt{\frac{2}{5}}$,

et $V(X') = V(Y') = V(Z') = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 \times \frac{5}{2} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$. Les variables X, Y, Z sont indépendantes, donc X', Y', Z' aussi. Les covariances des variables prises deux à deux sont égales, car elles sont nulles ; on peut appliquer les résultats de la question 1.

Nous sommes dans le cas précédent de la question 1–d), avec $c = 0$, donc $c \in [-\frac{1}{2}, 1]$

Si nous notons $R' = xX' + yY' + zZ'$, alors $R' = \sqrt{\frac{2}{5}}R$.

D'autre part, nous savons que $V(R) = \frac{5}{2}V(R')$; R **sera de variance minimale si et seulement si** R' **est de variance minimale.**

Or on sait que R' sera de variance minimale si et seulement si $x = y = z = \frac{1}{3}$.

> Le portefeuille $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ donne le rendement $R'_0 = \frac{1}{3}(X'+Y'+Z')$.
>
> Donc le portefeuille $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ donne $R_0 = \frac{1}{3}(X+Y+Z)$.
>
> $V(R_0) = \frac{1}{9}\Big(V(X)+V(Y)+V(Z)\Big) = \frac{1}{9} \times 3 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$.

2–b)

La variable $T = X+Y+Z$ suit la loi binomiale de paramètres $(30, \frac{1}{2})$, puisque chacune des variables suit la binomiale de paramètres $(10, \frac{1}{2})$ et puisqu'elles sont indépendantes.

Nous pouvons approcher cette variable par une autre qui suit la loi normale de paramètres $(15, \frac{15}{2})$.

$\frac{1}{3}(X+Y+Z) \geq 4 \Longleftrightarrow T \geq 12.$

La variable $T^* = \dfrac{T-15}{\sqrt{\frac{15}{2}}}$ est centrée réduite et peut être approchée par une variable qui suit la normale centrée réduite **d'après le théorème de la limité centrée**.

Faisons cette approximation, c'est-à-dire considérons que T suit la loi normale $\mathcal{N}(15, \frac{15}{2})$.

$$\begin{aligned}
(T \geq 12) \quad &\Longleftrightarrow \Big(T^* \geq \frac{12-15}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\Big) \\
p(T \geq 12) \quad &= p(T^* \geq \frac{12-15}{\sqrt{\frac{15}{2}}}) \\
&= 1 - p\Big(T^* \leq \frac{-3}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\Big) \\
&= 1 - \Phi\Big(\frac{-3}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\Big) \\
&= \Phi\Big(\frac{3}{\sqrt{\frac{15}{2}}}\Big) \\
&\quad (\text{ car } \Phi(x) + \Phi(-x) = 1) \\
&= \Phi\Big(\sqrt{\frac{18}{15}}\Big) \\
&= \Phi\Big(\sqrt{\frac{6}{5}}\Big).
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(R \geq 4) = \Phi\Big(\sqrt{\frac{6}{5}}\Big) = 0,86.}$$