



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 6 Mai 1998, de 8 h à 12 h

EXERCICE I

1. a) Soit  $\mu$  un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'inconnues  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

i) Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

ii) Résoudre, en discutant suivant les valeurs de  $\mu$ , le système

$$\begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

iii) Déterminer enfin, suivant les valeurs de  $\mu$ , les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier  $n \geq 1$  on note  $\mathbb{R}_n[x]$  l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  et, à toute fonction polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_n[x]$ , on associe la fonction polynôme  $T_n P$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$T_n P(x) = (nx + 1)P(x) + (1 - x^2)P'(x).$$

- Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , l'application  $P \mapsto T_n P$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[x]$ .
- Donner la matrice  $M_n$  de cet endomorphisme  $T_n$  dans la base de  $\mathbb{R}_n[x]$  formée des fonctions polynômes  $1, X, \dots, X^n$  où  $X^k$  désigne, pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , la fonction  $x \mapsto x^k$ .
- Dans le cas  $n = 3$ , donner les valeurs propres de  $T_3$  et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.
- En faisant la somme des lignes de la matrice  $M_n$ , déterminer simplement une valeur propre de  $T_n$ .

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de  $T_n$ .

- a) Etant donné un réel  $\lambda$  calculer, pour  $-1 < x < 1$ , l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} dt.$$

On cherchera d'abord deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\frac{nt + 1 - \lambda}{1 - t^2} = \frac{a}{1 - t} + \frac{b}{1 + t}$ .

- Montrer que si les nombres  $h = n + 1 - \lambda$  et  $k = n - 1 + \lambda$  sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction  $\exp(-g_\lambda(x))$  est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que  $-(n - 1) \leq \lambda \leq n + 1$ .
- Pour  $n = 3$  quels sont les réels  $\lambda$  qui vérifient les conditions précédentes ? Pour un entier  $n \geq 1$  quelconque, combien de réels  $\lambda$  vérifient ces conditions ?
- Montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T_n$  et si  $P_\lambda$  est un vecteur propre associé, alors la fonction  $h$ , définie sur  $] - 1, 1[$  par  $h(x) = P_\lambda(x) \exp(g_\lambda(x))$ , a une dérivée nulle. Que vaut alors  $P_\lambda$  ?
- Déterminer les valeurs propres de  $T_n$  et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas  $n$  pair et  $n$  impair).



## EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ) et pile avec la probabilité  $q = 1 - p$ .

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité  $P$ , modélisant cette expérience.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on note

•  $U_n$  l'événement : on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro  $n$  et  $n + 1$ ,

et on pose  $u_n = P(U_n)$ .

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on note

•  $A_n$  l'événement : les  $n$  premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le  $n$ -ième lancer donne face,

•  $B_n$  l'événement : les  $n$  premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le  $n$ -ième lancer donne pile,

et on pose  $x_n = P(A_n)$ ,  $y_n = P(B_n)$ .

1. a) Déterminer  $u_1$  ;  $x_2, y_2, u_2$  ;  $x_3, y_3, u_3$ .
- b) Trouver, pour  $n \geq 2$ , une relation simple entre  $x_n$  et  $u_n$ .
- c) Pour tout  $n \geq 2$  déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1} / A_n), \quad P(A_{n+1} / B_n), \quad P(B_{n+1} / A_n), \quad P(B_{n+1} / B_n).$$

- d) En déduire, pour tout  $n \geq 2$ , les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que  $p = q = \frac{1}{2}$ .
- a) Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ , on a  $2^n y_n = f_n$ .

- b) On pose  $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Montrer que l'on a, pour tout entier  $n \geq 0$ ,  
$$f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

c) En déduire, pour tout entier  $n \geq 2$ , une expression de  $x_n$ , puis de  $u_n$ , en fonction de  $n, \alpha$  et  $\beta$ .

d) Vérifier que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$ , c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où  $p = \frac{2}{3}$ . Donner, pour tout entier  $n \geq 1$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .