www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 6 Mai 1998, de 8 h à 12 h

LES ANNALES

EXERCICE I

1. a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1)\begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4.

i) Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2)\begin{cases} \mu x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + \mu x_4 = 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0 \end{cases}$$

ii) Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ, le système

$$\begin{cases} (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 = 0 \end{cases}$$

iii) Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ, les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et, à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme $T_n P$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T_n P(x) = (nx+1)\,P(x) + (1-x^2)\,P'(x).$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application $P \mapsto T_n P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Donner la matrice M_n de cet endomorphisme T_n dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1,\ X, \ldots\ X^n$ où X^k désigne, pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.

c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de T_3 et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.

d) En faisant la somme des lignes de la matrice M_n, déterminer simplement une valeur propre de T_n.

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de T_n.

a) Etant donné un réel λ calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt+1-\lambda}{1-t^2}\,dt.$$

On cherchera d'abord deux réels a et b tels que $\dfrac{nt+1-\lambda}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

b) Montrer que si les nombres $h = n+1-\lambda$ et $k = n-1+\lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n-1) \leq \lambda \leq n+1$.

c) Pour $n = 3$ quels sont les réels λ qui vérifient les conditions précédentes ? Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, combien de réels λ vérifient ces conditions ?

d) Montrer que si λ est une valeur propre de T_n et si P_λ est un vecteur propre associé, alors la fonction h, définie sur $]-1,1[$ par $h(x) = P_\lambda(x)\exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors P_λ ?

e) Déterminer les valeurs propres de T_n et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note

- U_n l'événement : *on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$,*

et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

- A_n l'événement : *les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n-ième lancer donne face,*
- B_n l'événement : *les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n-ième lancer donne pile,*

et on pose $x_n = P(A_n)$, $y_n = P(B_n)$.

1. a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3.

   b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.

   c) Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles

   $$P(A_{n+1} / A_n), \quad P(A_{n+1} / B_n), \quad P(B_{n+1} / A_n), \quad P(B_{n+1} / B_n).$$

   d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

   $$\begin{cases} x_{n+1} &= p\, y_n \\ y_{n+1} &= q\,(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.

   a) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :

   $$f_0 = 1,\ f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,.$$

   Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

   b) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

   c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n, puis de u_n, en fonction de n, α et β.

   d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}$. Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021