CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 6 Mai 1998, de 8 h à 12 h

EXERCICE I

1. a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1)\begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4.

i) Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2)\begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

ii) Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ, le système

$$\begin{cases} (3-\mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3-\mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

iii) Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ, les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n et, à toute fonction polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, on associe la fonction polynôme $T_n P$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$T_n P(x) = (nx+1)\,P(x) + (1-x^2)\,P'(x).$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'application $P \mapsto T_n P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Donner la matrice M_n de cet endomorphisme T_n dans la base de $\mathbb{R}_n[x]$ formée des fonctions polynômes $1,\ X, \dots\ X^n$ où X^k désigne, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, la fonction $x \mapsto x^k$.

c) Dans le cas $n = 3$, donner les valeurs propres de T_3 et écrire les fonctions polynômes formant une base de vecteurs propres.

d) En faisant la somme des lignes de la matrice M_n, déterminer simplement une valeur propre de T_n.

3. On se propose de déterminer plus généralement toutes les valeurs propres de T_n.

a) Etant donné un réel λ calculer, pour $-1 < x < 1$, l'intégrale

$$g_\lambda(x) = \int_0^x \frac{nt+1-\lambda}{1-t^2}\,dt.$$

On cherchera d'abord deux réels a et b tels que $\dfrac{nt+1-\lambda}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

b) Montrer que si les nombres $h = n+1-\lambda$ et $k = n-1+\lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou nuls, pairs, alors la fonction $\exp(-g_\lambda(x))$ est une fonction polynôme. Vérifier que ces conditions impliquent que $-(n-1) \leq \lambda \leq n+1$.

c) Pour $n = 3$ quels sont les réels λ qui vérifient les conditions précédentes ? Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, combien de réels λ vérifient ces conditions ?

d) Montrer que si λ est une valeur propre de T_n et si P_λ est un vecteur propre associé, alors la fonction h, définie sur $]-1, 1[$ par $h(x) = P_\lambda(x)\exp(g_\lambda(x))$, a une dérivée nulle. Que vaut alors P_λ ?

e) Déterminer les valeurs propres de T_n et une base de vecteurs propres (on pourra distinguer les cas n pair et n impair).

EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P, modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note

- U_n l'événement : *on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$*,

et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

- A_n l'événement : *les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n-ième lancer donne face*,
- B_n l'événement : *les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n-ième lancer donne pile*,

et on pose $x_n = P(A_n)$, $\quad y_n = P(B_n)$.

1. a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3.

   b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n.

   c) Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles
$$P(A_{n+1} \,/\, A_n), \quad P(A_{n+1} \,/\, B_n), \quad P(B_{n+1} \,/\, A_n), \quad P(B_{n+1} \,/\, B_n).$$

   d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :
$$\begin{cases} x_{n+1} & = & p\, y_n \\ y_{n+1} & = & q\,(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.

   a) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :
$$f_0 = 1,\ f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,.$$
   Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

   b) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$, $f_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

   c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n, puis de u_n, en fonction de n, α et β.

   d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}$. Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n.