EXERCICE I

Dans tout l'exercice n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. a) Etudier, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{n+1} + x^n$.

   b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.

   c) En déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :
   $$x^{n+1} + x^n = 2.$$

2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
$$(E_n) \qquad X^{n+1} + X^n = A.$$

   a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   $$(E'_n) \qquad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que $DY = YD$.

      ii. En déduire que $b = c = 0$.

      iii. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

      iv. Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

   c) On note μ la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de μ.

EXERCICE II

On désigne par λ un paramètre réel strictement supérieur à 1. Soit H l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > 0$ et soit D l'ensemble des points de H tels que $y \neq 0$.
L'objet de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur H par
$$f(x, y) = x^\lambda y - y^2 - y\,\ln(x + 1) + 1.$$

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\phi(x) = x^\lambda - \ln(x + 1)$ et ϕ' sa dérivée.

a) Montrer que l'équation $\phi'(x) = 0$ admet une racine et une seule dans $]0, +\infty[$.
On note b cette racine et on pose $\phi(b) = 2c$. Montrer que $c < 0$.

b) Montrer que l'équation $\phi(x) = 0$ admet une racine et une seule, notée a, dans $]0, +\infty[$ et que $a > b$.

2. Calculer les dérivées partielles f'_x et f'_y de la fonction f.

3. a) Déterminer l'ensemble des points $(x, y) \in H$ vérifiant $f'_x(x, y) = 0$.

   b) Déterminer les points $(x, y) \in H$ vérifiant $f'_x(x, y) = 0$ et $f'_y(x, y) = 0$. On exprimera les solutions (x, y) trouvées à l'aide des nombres a, b et c définis à la question **1**.

4. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

   b) Montrer que f admet dans D un extremum en un unique point (x_λ, y_λ) que l'on précisera.

EXERCICE III

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé, muni de la probabilité P.
Pour tout entier $n \geq 1$, soit X_n une variable aléatoire réelle vérifiant $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n - 1$. On pose $Y_n = \dfrac{X_n}{n}\cdot$
D'autre part, soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. a) Déterminer l'espérance $E(Z)$ et la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.

   b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Y_n.
   Déterminer les limites des suites $(E(Y_n))_{n\geq 1}$ et $(V(Y_n))_{n\geq 1}$.

   c) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, strictement monotone, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(f(Y_n)) = E(f(Z))$.

2. Pour tout réel x on note $\mathrm{Ent}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x.

   a) Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Ent}(nx)}{n} = x$.

   b) Soit a et b deux réels vérifiant $0 \leq a \leq b \leq 1$ et soit $I_n(a, b)$ le nombre d'entiers k vérifiant $a < \dfrac{k}{n} \leq b$. Montrer que $I_n(a, b) = \mathrm{Ent}(nb) - \mathrm{Ent}(na)$.

   c) Montrer que, si $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(a < Y_n \leq b) = P(a < Z \leq b)$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$ on note Z_n la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\mathrm{Ent}(n\,Z)$ et on pose $D_n = Z - Z_n$.

   a) Montrer Z_n et Y_n ont même loi de probabilité.

   b) Trouver la fonction de répartition et une densité de D_n.

c) Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq n-1$ et un réel y tel que $0 \leq y \leq \frac{1}{n}$, exprimer à l'aide de la variable aléatoire Z l'événement $\{Z_n = \frac{k}{n}$ et $D_n \leq y\}$. En déduire la valeur de $P(Z_n = \frac{k}{n}$ et $D_n \leq y)$.

d) Montrer que les variables aléatoires Z_n et D_n sont indépendantes.