Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 4 mai 1998 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

La fonction logarithme népérien est notée ln .

1. Soit $x \in [-1;1[$.

a. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;1[$:

$$\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t} .$$

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout t de $[-1;x]$:

$$\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k \right| \leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-x} .$$

c. Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-x)} .$$

d. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

2. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Exercice 2

Dans l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 3, on note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.a. Calculer A^2 et A^3 .

b. En déduire que A n'est pas inversible et que A admet 0 pour unique valeur propre.

c. Déterminer une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.

d. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. On note, pour tout réel a, $M(a) = I + 2\,a\,A + 2\,a^2\,A^2$, et E l'ensemble des matrices $M(a)$ lorsque a décrit $\mathbb{R}$.

a. Calculer, pour tout couple (a, b) de réels, le produit $M(a)M(b)$ et montrer que ce produit appartient à E.

b. En déduire que, pour tout réel a, $M(a)$ est inversible et préciser son inverse.

3. Soit a un réel non nul.

a. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de $M(a)$.

b. Calculer $(M(a) - I)^3$.
En déduire que $M(a)$ admet 1 pour seule valeur propre.
Préciser une base du sous-espace propre de $M(a)$ associé à la valeur propre 1.

c. La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise. (Toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant.)

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a. Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

b. Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante :
pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $(X = i \text{ et } Y = j)$ est l'évènement
" les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ieme}}$ est blanche
ou
les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ieme}}$ est verte ".

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

b. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, et que $E(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

c. Montrer que $E(X)$ est minimale lorsque $p = \dfrac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j .$$

4.a. En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

b. Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5.a. Etablir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes

(on pourra envisager $P(X = 1 \text{ et } Y = 1)$).

b. Démontrer que, si $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes