ECRICOME
Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHEMATIQUES

Lundi 18 mai 1998 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Option économique

EXERCICE 1

1 - Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \to g(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter sa dérivée.

b) Dresser le tableau de variations de g , avec ses éventuelles limites aux bornes.

2 - Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \to f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$.

a) A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel x positif, on a :

$$\int_0^x f(t)\,dt = g(e^x) + 2\ln 2.$$

b) Montrer alors qu'il existe un réel c, qu'on explicitera, tel que l'application h_c définie

sur $\mathbb{R}$ par : $x \to h_c(x) = \begin{cases} c\,f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ soit une densité d'une variable aléatoire X.

c) On considère la variable aléatoire $Y = e^X$.

Montrer que Y a une densité que l'on explicitera.

EXERCICE 2

Dans cet exercice on étudie la diagonalisation des matrices carrées d'ordre 3 anti-symétriques (c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$).

On étudie d'abord un cas particulier avant de passer au cas général.

Partie A

1 - On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note 0_E l'élément nul de $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que toute famille libre de trois vecteurs de E est une base de E.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E représenté par A dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3$, $u_2 = e_1 + 2e_2$ et $u_3 = f(u_2)$.

a) Déterminer le noyau de f et en donner une base.

b) Montrer que $\mathcal{U}$ est une base de E et déterminer la matrice B représentant f dans cette base.

3 - Soit λ un réel non nul.

Montrer que pour tout vecteur x de E , $[\, f(x) = \lambda x \,]$ équivaut à $[\, x = 0_E \,]$.

On pourra utiliser la décomposition de x dans $\mathcal{U}$.

4 - a) Quel est finalement l'ensemble des valeurs propres de A ?

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie B

Soient a, b, c trois réels donnés. On pose $a^2 + b^2 + c^2 = s$ et on suppose $s \neq 0$.

On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de E représenté par M dans la base $\mathcal{B}$.

1 - a) Calculer M^2 et M^3.

b) Vérifier que M^3 s'exprime simplement en fonction de M et s.

2 - Montrer que, si le réel λ est une valeur propre de g, alors λ est nécessairement nul. On utilisera la relation trouvée ci - dessus.

3 - Montrer que l'hypothèse " M est inversible " conduit à une contradiction.

4 - a) Quel est finalement, l'ensemble des valeurs propres de M ?

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

LES ANNALES

LES ANNALES

PROBLEME

Dans tout le problème, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $E(X)$ l'espérance de X si elle existe.

On note A l'événement " X prend une valeur paire " (on écrira dorénavant pour abréger " X est pair"). On rappelle que 0 est pair . On pose : $a = P(A)$.

- On dit que X a la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $a > 1/2$.

On définit deux variables aléatoires X_0 et X_1 :

$$X_0 = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad X_1 = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On dit que X a la propriété $\mathcal{Q}$ si et seulement si $E(X_1) > E(X_0)$.

Préliminaires

1 - Déterminer $X_0 + X_1$.

2 - On note Y la variable aléatoire qui vaut $\begin{cases} 1 & \text{si } X \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } X \text{ est impair} \end{cases}$

Montrer les relations : $X_0 = \frac{1}{2}(1 + Y)X$ et $X_1 = \frac{1}{2}(1 - Y)X$

Partie A

Dans cette partie, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p : $(0 < p < 1)$ et on pose $q = 1 - p$.

1 - Montrer que $a = \frac{q}{q+1}$, puis que X ne vérifie pas la propriété $\mathcal{P}$.

2 - Montrer que X_1 admet une espérance donnée par $E(X_1) = \frac{q^2+1}{(1+q)(1-q^2)}$

3 - Montrer que X_0 admet aussi une espérance que l'on précisera, puis que X vérifie la propriété $\mathcal{Q}$.

LES ANNALES

Partie B

1 - Pour tout entier naturel n, on pose $p_n = P(X = n)$ et on suppose que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

En écrivant P(A) et $P(\bar{A})$ à l'aide des nombres p_n, montrer que X vérifie $\mathcal{P}$.

2 - On suppose maintenant que X admet une espérance.

a) Montrer que X_0 et X_1 admettent aussi des espérances.

b) Montrer, à l'aide des préliminaires, que X vérifie $\mathcal{Q}$ si et seulement si $E[YX] < 0$.

Partie C

On suppose ici que la variable aléatoire X est en fait à valeurs dans l'intervalle d'entiers [0, 20] et donc que, pour tout entier $n \geq 21$, $p_n = 0$.

On définit un type :

TYPE TABLE = ARRAY [0 .. 20] OF REAL ;

et on demande d'écrire un programme en Turbo Pascal :

- contenant une procédure ENTRE_LOI (à écrire) qui permet à l'utilisateur d'entrer dans une variable T de type TABLE les nombres $P(X = k)$ pour $k = 0, 1, \dots, 20$.
- calculant E(YX) et indiquant par un message si X vérifie $\mathcal{Q}$ ou non.

Partie D

Le but de cette partie est d'étudier le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 2$ et $0 < p < \frac{1}{2}$.

1 - Soit f la fonction de deux variables définie sur l'ouvert $U =]1, +\infty[\times]0, \frac{1}{2}[$ de $\mathbb{R}^2$ par : $(x, y) \to f(x, y) = x y (1 - 2y)^{x-1} = x y \exp[(x - 1)\ln(1 - 2y)]$

a) Montrer que f admet en tout point (x, y) de U des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Les calculer et les mettre sous forme de produits.

Montrer que f est de classe C^1 sur U.

b) Montrer que pour tout u élément de $]0, 1[$ $\ln(1-u) < -u$.

En déduire que f n'a pas d'extremum sur U.

2 - Dans cette question, p est un réel vérifiant : $0 < p < 1$.

On réalise une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité "de succès" p et de probabilité "d'échec" $q = 1 - p$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'événement :

F_n = "au cours des n premières épreuves, on obtient un nombre pair de succès" et on pose $u_n = P(F_n)$.

a) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1-p)\,u_n + p\,(1-u_n)$.

On pose par convention $u_0 = 1$. Vérifier que la relation précédente est encore vraie pour $n = 0$.

b) Donner l'expression générale de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3 - On se place maintenant dans le cas annoncé au début de la partie D : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 2$ et $0 < p < \frac{1}{2}$.

a) En reprenant la définition du réel a associé à la variable X, montrer que $a = u_n$.

Montrer que X vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

b) Calculer $E(Y X)$.

En déduire que $E(X_1) - E(X_0) = f(n, p)$ (où f est la fonction introduite en D-1) puis que X a la propriété $\mathcal{Q}$.

c) On considère l'application partielle :

$$g : y \to g(y) = f(n, y) \text{ définie sur }]0, \tfrac{1}{2}[\quad (n \geq 2)$$

Montrer que g admet un maximum $M_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

d) Montrer que la fonction $\phi : x \to (x-1)\ln(1-\frac{1}{x})$ est de classe C^2 sur $[2, +\infty[$, que sa dérivée seconde est strictement positive sur $[2, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi'(x) = 0$.

En déduire que la suite $(M_k)_{k \geq 2}$ est strictement décroissante.

e) Montrer que la suite $(M_k)_{k \geq 2}$ converge, préciser sa limite et montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{2e} \leq M_k \leq \frac{1}{4}$.

4 - On suppose que deux joueurs Alain et Béatrice jouent à pile ou face avec une pièce déséquilibrée, la probabilité d'obtenir "face" étant égale à p ($0 < p < \frac{1}{2}$).

Une pièce est lancée n fois ($n \geq 2$), les lancers successifs sont supposés indépendants. Alain empoche un gain égal au nombre de faces apparues si ce nombre de faces est pair et Béatrice, un gain égal au nombre de faces apparues si ce nombre de faces est impair.

a) Quel est celui des joueurs qui a le plus de chances de gagner ?

b) Quel est celui des joueurs qui a la plus forte espérance de gain ?

c) Comment interpréter l'encadrement obtenu à la question 3-e) de cette partie ?