Recherche de puissance n$^{\text{ème}}$

Soit M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer les réels λ tels que $M-\lambda I$ ne soit pas inversible.

b) Pour chacune de ces valeurs de λ, déterminer l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telles que $MX=\lambda X$.

2) Soient H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4, écrites sous la forme de blocs :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix} \text{ avec : } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}} \text{ et :}$$

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix} \text{ avec : } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ et } A' = (a'_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}}$$

Vérifier que :

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix} \text{ avec : } C'' = C + AC'.$$

3) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \text{ avec : } V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) On considère la matrice W définie par : $W=V-2I_3$.
a) Calculer W^2 et W^3.
b) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, W^n.
c) Expliciter, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la matrice V^n.

5) a) Soit X l'unique matrice colonne telle que $MX=X$ et dont la première composante vaut 1. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, M^nX.

b) On considère les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Correction

1) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, M-λI$_4$ est non inversible si, et seulement si, l'équation (M-λI$_4$)X=0 admet des solutions X non nulles. Or, on a :

$$(M-?I_4)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-? & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-? & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-? & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -? \end{pmatrix} X = 0 \qquad \textbf{donc } (L_4 \leftrightarrow L_3 \leftrightarrow L_2):$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \textbf{d'où } (L_2 \leftarrow L_4 - 2L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow 2L_3 - ?L_4)\textbf{:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-l & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2-l & 2l-3 & 0 \\ l+2 & (2-l)^2 & 2-l & 0 \\ -1 & 4-l & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \ \mathbb{1}.$$

Deux cas se présentent alors :

- **Si λ=2. $\mathbb{1}$ devient :**

$$\mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \textbf{donc, en posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \textbf{:}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -5x + z = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases} \qquad \textbf{d'où}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ 2y - 2t = 0 \end{cases} \qquad \textbf{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X} \in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, M-2I$_4$ est non inversible, et l'ensemble des matrices telles que MX=2X est $Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- **Si $\lambda \neq 2$. $\mathbb{I}$ devient** $(L_2 \leftarrow (2-\lambda)L_2 - (2\lambda - 3)L_3)$ **:**

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) & 2(2-\lambda)^3 & 0 & 0 \\ \lambda + 2 & (2-\lambda)^2 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

La matrice précédente étant triangulaire inférieure, l'équation n'admet de solution non nulle que si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, donc comme $\lambda \neq 2$, si et seulement si, $\lambda = 1$. Dans ce cas, $\mathbb{I}$ devient :

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

donc en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ **:**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 3y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -4x \\ t = -x \end{cases}$$

et donc :

$$\Leftrightarrow \mathbf{X} \in Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, $M - I_4$ est non inversible, et l'ensemble des matrices telles que $MX = X$ est $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

On peut alors conclure :

1 et 2 sont les seules valeurs de λ telles que $M - \lambda I_4$ soit non inversible, et les ensembles de matrices telles que $MX = X$ et $MX = 2X$ sont respectivement $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ **et** $Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2) **Par définition des matrices H et H', on a :**

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ c & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & a_{1,1}' & a_{1,2}' & a_{1,3}' \\ b' & a_{2,1}' & a_{2,2}' & a_{2,3}' \\ c' & a_{3,1}' & a_{3,2}' & a_{3,3}' \end{pmatrix}$$ **donc :**

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a + a_{1,1}a'+a_{1,2}b'+a_{1,3}c' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,3}' \\ b + a_{2,1}a'+a_{2,2}b'+a_{2,3}c' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,3}' \\ c + a_{3,1}a'+a_{3,2}b'+a_{3,3}c' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,3}' \end{pmatrix}$$

Or, on a :

$$C + AC' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$ **donc :**

$$= \begin{pmatrix} a + a_{1,1}a'+a_{1,2}b'+a_{1,3}c' \\ a + a_{2,1}a'+a_{2,2}b'+a_{2,3}c' \\ a + a_{3,1}a'+a_{3,2}b'+a_{3,3}c' \end{pmatrix}$$ **et :**

$$AA' = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,3}' \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,3}' \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,3}' \end{pmatrix}$$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix}, \text{ où } C'' = A + AC'}$$

3) **Montrons par récurrence, que pour tout n∈ℕ*, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :** $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$**.**

- **Au rang n=1. Par définition de M, on a :** $M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix}$**, avec** $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$**. La propriété est donc bien vérifiée au rang n=1.**

- **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :**

$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$. **On a :**

$$M^{n+1} = M^n M$$ **donc d'après l'hypothèse de récurrence :**

$$= \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ U_1 & V \end{pmatrix}$$ **donc, d'après le résultat de la question précédente, en substituant U_n à C, V^n à A, U_1 à C' et V à A' :**

$$= \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n + V^n U_1 & V^n V \end{pmatrix}$$ **d'où**

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Comme $U_n+V^nU_1$ est une matrice colonne à trois lignes, on peut alors écrire, en posant $U_{n+1}=U_n+V^nU_1$, que la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

- **On peut alors conclure :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}}$$

4) a) Comme $W = V - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On peut alors écrire :

$$W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ **d'où**

$$\boxed{W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

On a donc :

$$W^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4) b) Le produit de toute matrice par la matrice nulle étant nulle, on peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in [\![3, +\infty[\![, W^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On a de plus :

$$W^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) On a :

$$V^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **et :**

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a V=W+2I. Les matrices W et 2I commutant (i.e. W(2I)=2IW), on peut donc écrire, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, V^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} W^k$$ **donc, comme :** $\forall n \in [\![3,+\infty[\![, W^n = 0$

$$= 2^n I + n2^{n-1} W + n(n-1)2^{n-3} W^2$$ **d'où**

$$= \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Les cas n=0 et n=1 rejoignant le cas général, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}}$$

5) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n X = X$.

. Au rang n=1. D'après la définition de X, la propriété est bien vérifiée au rang n=1.

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$**. Supposons que :** $M^n X = X$**. On peut alors écrire, en multipliant à gauche par M :**

$M^{n+1} X = MX$ **donc d'après la définition de X :**
$= X$.
Ainsi, la propriété est vérifiée au rang n+1.

.On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n X = X.}$$

b) D'après le résultat de la question 3, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ **donc, comme** $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(cf. question 1b) et d'après le résultat des questions 4c et 5a :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ b_n & n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ c_n & n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n + (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n+1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3} = 1 \\ b_n + n2^{n-1} - 2^{n+2} + n2^{n-1} = -4 \\ c_n + n2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n+1} + (n-1)2^n + n(n-1)2^{n-3} = -1 \end{cases}$$

soit finalement :

$$\boxed{\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = -2^n - n(n-1)2^{n-2} + 1 \\ b_n = (4-n)2^n - 4 \\ c_n = 2^n - n(n-1)2^{n-2} - 1 \end{cases}}$$