Calcul matriciel

Méthodes

1. Opérations sur les matrices

- *Somme de deux matrices.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$, $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$. La somme des matrices A et B est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, C=A+B définie par : $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

- *Produit d'une matrice par un réel.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Le produit de la matrice A par le réel λ est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, C=λA définie par : $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=\lambda a_{i,j}$.

- *Produit de deux matrices.* **Soient n, m et p trois entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le m}}$. Le produit des matrices A et B est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, C=AB définie par : $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$, $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$.

- *Transposée d'une matrice.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$. La transposée de la matrice A est la matrice $C\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $C={}^tA$ définie par : $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}$ où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $c_{i,j}=a_{j,i}$.

  Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, ${}^t(\lambda A)=\lambda{}^tA$. De plus, on a pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$: ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$. Enfin, si A est inversible, ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

- *Matrice symétrique.* **Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est symétrique si et seulement si : ${}^tA=A$.**

2. Inversibilité d'une matrice et détermination de son inverse éventuelle.

Ensemble $GL_n(\mathbb{R})$

- **Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB=I_n$ ou $BA=I_n$ (et si l'une de ces égalités est vérifiée, alors $AB=BA=I_n$). Lorsque A est inversible, B est appelée inverse de A et on note $B=A^{-1}$.**
- **Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$. Attention… il ne s'agit pas d'un espace vectoriel.**

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- **Soient n un entier naturel non nul et $(A,B)\in(GL_n(\mathbb{R}))^2$:**
  - **A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1}=A$,**
  - **${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$,**
  - **AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.**

A l'aide de la méthode du pivot de Gauss

- **Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si, et seulement s'il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A menant à** une matrice T triangulaire **(supérieure ou inférieure)** dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

  Attention.. **Une matrice A admettant un ou plusieurs coefficients diagonaux nuls peut être inversible, comme c'est le cas, par exemple, de la matrice** $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

- Opérations élémentaires. **Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires sur les lignes de A sont :**
  - **la multiplication d'une ligne par un réel** α non nul **:** $L_i \leftarrow \alpha L_i$ **,**
  - **l'ajout d'un multiple d'une ligne à une autre :** $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ **.**

N.B. : on peut également effectuer ces opérations sur les lignes du système $AX=0$ pour montrer que $X=0$ en est l'unique solution.

En considérant les lignes ou les colonnes.

Se souvenir qu'une matrice carrée **est inversible si, et seulement si, ses vecteurs colonnes forment une famille libre. De même, une matrice est inversible si, et seulement si, ses vecteurs lignes forment une famille libre.**

Calcul de l'inverse

Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En posant $A=I_nA$, on effectue une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A (et de I_n) qui mènent à I_n (et à A^{-1}) et on obtient alors : $I_n=A^{-1}A$.

Exemple : Montrons que la matrice $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&3&1\\0&2&2\end{pmatrix}$ **est inversible et déterminons son inverse. On a :**

$$A=IA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&3&1\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A \qquad \textbf{d'où } (L_2 \leftarrow 3L_2+L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&1&-1\\0&10&2\\0&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}A \qquad \textbf{soit encore } (L_3 \leftarrow -5L_3+L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&1&-1\\0&10&2\\0&0&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\1&3&-5\end{pmatrix}A \quad \blacksquare.$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Comme il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A qui mène à une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut alors écrire que A est inversible et, en effectuant les transformations $L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3$**, on obtient :**

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 15 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A \quad \textbf{d'où } (L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2) :$$

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -30 & 30 \\ 5 & 15 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A \qquad \textbf{soit enfin}$$

$$(L_1 \leftarrow \frac{1}{15}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2, L_3 \leftarrow -L_3) :$$

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} A \quad \textbf{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{d'où la conclusion :}$$

A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

3. Calcul des puissances $n^{èmes}$ d'une matrice

1. *A l'aide d'un raisonnement par récurrence*

Si l'on cherche à déterminer M^n (où M est une matrice carrée et n un entier naturel quelconque), on peut calculer M^2 et M^3 pour trouver une formule simple, que l'on démontrera par récurrence.

2. *A l'aide de la formule du binôme de Newton*

Pour déterminer M^n, on peut chercher à écrire M sous la forme M=A+B où A et B sont deux matrices commutantes. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB=BA (on dit qu'elles commutent), on a :

$\forall p \in \mathbb{N}^*, (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$, en adoptant la convention usuelle : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^0 = I_n$.

Cette méthode peut s'avérer particulièrement utile dans le cas des matrices triangulaires. En effet, si M est une matrice triangulaire, elle peut s'écrire comme somme d'une matrice diagonale D (dont les coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de M) et d'une matrice triangulaire T (dont les coefficients diagonaux sont nuls). Les puissances successives de D sont alors simples à calculer, tandis qu'il existera un entier naturel k à partir duquel les puissances de T seront nulles. SI D et T commutent, il sera alors aisé de calculer les puissances de M. Ainsi, en posant :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut montrer que DT=TD, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ et : } \forall n \geq 2,\ T^n = 0$$

La formule du binôme de Newton permet alors d'obtenir M^n.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021