Méthodes

1. Opérations sur les matrices

- *Somme de deux matrices*. **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **et** $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **. La somme des matrices A et B est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, C=A+B définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$.

- *Produit d'une matrice par un réel.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **et $\lambda\in\mathbb{R}$. Le produit de la matrice A par le réel λ est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C=\lambda A$ définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, $c_{i,j}=\lambda a_{i,j}$.

- *Produit de deux matrices.* **Soient n, m et p trois entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **et $B\in\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$,** $B=(b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le m}}$ **. Le produit des matrices A et B est la matrice $C\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, C=AB définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!]$, $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$.

- *Transposée d'une matrice.* **Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,** $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ **. La transposée de la matrice A est la matrice $C\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $C={}^tA$ définie par :** $C=(c_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le n}}$ **où :**

  $\forall(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $c_{i,j}=a_{j,i}$.

  Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(A,B)\in(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, ${}^t(\lambda A)=\lambda{}^tA$. De plus, on a pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$: ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$. Enfin, si A est inversible, ${}^tA$ est inversible, d'inverse ${}^t(A^{-1})$.

- *Matrice symétrique.* **Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est symétrique si et seulement si : ${}^tA=A$.**

2. Inversibilité d'une matrice et détermination de son inverse éventuelle.

Ensemble $GL_n(\mathbb{R})$

- **Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si $\exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB=I_n$ ou $BA=I_n$ (et si l'une de ces égalités est vérifiée, alors $AB=BA=I_n$). Lorsque A est inversible, B est appelée inverse de A et on note $B=A^{-1}$.**
- **Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $GL_n(\mathbb{R})$. Attention… il ne s'agit pas d'un espace vectoriel.**

Calcul matriciel

- **Soient n un entier naturel non nul et $(A,B)\in(GL_n(\mathbb{R}))^2$:**
  - **A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1}=A$,**
  - **${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$,**
  - **AB est inversible et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.**

A l'aide de la méthode du pivot de Gauss

- **Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est inversible si, et seulement s'il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A menant à** une matrice T triangulaire **(supérieure ou inférieure)** dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

  Attention.. **Une matrice A admettant un ou plusieurs coefficients diagonaux nuls peut être inversible, comme c'est le cas, par exemple, de la matrice $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.**

- Opérations élémentaires. **Soient n et p deux entiers naturels non nuls et $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Les opérations élémentaires sur les lignes de A sont :**
  - **la multiplication d'une ligne par un réel α** non nul **:** $L_i\leftarrow \alpha L_i$ **,**
  - **l'ajout d'un multiple d'une ligne à une autre :** $L_i \leftarrow L_i+\alpha L_j$ **.**

N.B. : on peut également effectuer ces opérations sur les lignes du système AX=0 pour montrer que X=0 en est l'unique solution.

En considérant les lignes ou les colonnes.

Se souvenir qu'une matrice carrée **est inversible si, et seulement si, ses vecteurs colonnes forment une famille libre. De même, une matrice est inversible si, et seulement si, ses vecteurs lignes forment une famille libre.**

Calcul de l'inverse

Soient n un entier naturel non nul et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En posant $A=I_nA$, on effectue une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A (et de I_n) qui mènent à I_n (et à A^{-1}) et on obtient alors : $I_n=A^{-1}A$.

Exemple : Montrons que la matrice $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ **est inversible et déterminons son inverse. On a :**

$$A=IA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}A$$

d'où $(L_2\leftarrow 3L_2+L_1)$ **:**

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 10 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}A$$

soit encore $(L_3\leftarrow -5L_3+L_2)$ **:**

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 10 & 2\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -5\end{pmatrix}A\ \mathbb{1}.$$

Comme il existe une suite de transformations élémentaires sur les lignes de A qui mène à une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on peut alors écrire que A est inversible et, en effectuant les transformations $L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3$ **et** $L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3$**, on obtient :**

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 8 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 15 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A$$

d'où $(L_1 \leftarrow 5L_1 - L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -30 & 30 \\ 5 & 15 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} A$$

soit enfin $\left(L_1 \leftarrow \frac{1}{15} L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2, L_3 \leftarrow -L_3\right)$ **:**

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} A$$

i.e. :

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

d'où la conclusion :

A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

3. Calcul des puissances $n^{\text{èmes}}$ d'une matrice

   1. *A l'aide d'un raisonnement par récurrence*

   Si l'on cherche à déterminer M^n (où M est une matrice carrée et n un entier naturel quelconque), on peut calculer M^2 et M^3 pour trouver une formule simple, que l'on démontrera par récurrence.

   2. *A l'aide de la formule du binôme de Newton*

   Pour déterminer M^n, on peut chercher à écrire M sous la forme M=A+B où A et B sont deux matrices commutantes. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que AB=BA (on dit qu'elles commutent), on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$$, en adoptant la convention usuelle : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^0 = I_n$.

Cette méthode peut s'avérer particulièrement utile dans le cas des matrices triangulaires. En effet, si M est une matrice triangulaire, elle peut s'écrire comme somme d'une matrice diagonale D (dont les coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de M) et d'une matrice triangulaire T (dont les coefficients diagonaux sont nuls). Les puissances successives de D sont alors simples à calculer, tandis qu'il existera un entier naturel k à partir duquel les puissances de T seront nulles. SI D et T commutent, il sera alors aisé de calculer les puissances de M. Ainsi, en posant :

$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On peut montrer que DT=TD, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ et : } \forall n \geq 2,\ T^n = 0$$

La formule du binôme de Newton permet alors d'obtenir M^n.