Intégrales de Wallis

Enoncé

Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

1) Calculer w_0 et w_1 .

2) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Montrer pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$.

En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t\, dt \text{ .}$$

En déduire : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

5) Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant 2. et 4. :

En déduire :

$$0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n \text{ .}$$

$$w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$$

6) Montrer, en utilisant 4., que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante.

En déduire : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction

1) ■ *On a :*

$$w_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$$ d'où :

$$\boxed{w_0 = \frac{\pi}{2}}$$

- On a :

$$w_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$$ donc :

$$= [\sin]_0^{\frac{\pi}{2}}$$ d'où :

$$\boxed{w_1 = 1}$$

2) ■ *On a :*

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos t \leq 1$$ donc, en multipliant par $\cos^n t \geq 0 (n \in \mathbb{N})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$$ d'où, en intégrant cette inégalité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions étant continues sur cet intervalle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} \leq w_n$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

3) ■ *On a :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^n t \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \ dt \geq 0$ d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0}$$

- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

4) ■ *On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \cdot \cos t \ dt .$$

Les fonctions $t \mapsto \cos^{n+1} t (n \in \mathbb{N})$ et $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut alors écrire, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \cos t$, on dérive $t \mapsto \cos^{n+1} t$) :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = [\cos^{n+1} t \cdot \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t \ dt$ d'où, comme $\sin 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t \ dt}$$

- On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot (1 - \cos^2 t) \ dt$ soit encore :

$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n t - \cos^{n+2} t) \ dt$ donc, par linéarité de l'intégrale :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} \quad = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t\, dt$ i.e. :

$= (n+1)w_n - (n+1)w_{n+2}$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n}$$

5) ■ *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant décroissante, on a :*

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} \leq w_{n+1} \leq w_n$ donc, d'après le résultat de la question précédente:

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w^n > 0$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n}$$

- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement positive, on peut alors écrire, en divisant par w_n :

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on peut donc écrire, d'après le théorème de l'encadrement : $\lim_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{w_{n+1} \sim w_n}$$

6) ■ *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant strictement positive, on peut écrire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est également strictement positive. On peut alors écrire :*

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+2)w_{n+2}w_{n+1}}{(n+1)w_{n+1}w_n}$ d'où, comme : $\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}w_n$:

$=1$ et donc :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$$

- On a donc :

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0$ donc :

$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)w_{n+1}w_n=w_1w_0$ d'où :

$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)w_{n+1}w_n=\dfrac{\pi}{2}$ donc, comme $w_{n+1}\sim w_n$:

$(n+1)w_n^{\ 2}\sim\dfrac{\pi}{2}$ d'où, comme $n+1\sim n$:

$nw_n^{\ 2}\sim\dfrac{\pi}{2}$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2nw_n^{\ 2}}{\pi}=1$ d'où, la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ étant continue en 1 :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}w_n=1$ soit finalement :

$$\boxed{w_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$$