Intégrales de Wallis

Énoncé

Pour tout entier naturel n , on note : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

- 1) Calculer w_0 et w_1 .
- 2) Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 3) Montrer pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$.

En déduire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

- 4) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t \, dt.$$

En déduire : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

- 5) Montrer pour tout entier naturel n , en utilisant 2. et 4. :

En déduire :

$$0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n.$$

$$w_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$$

- 6) Montrer, en utilisant 4., que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante.

En déduire : $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction

1) ■ On a :

$$w_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \quad \text{d'où :}$$

$$w_0 = \frac{\pi}{2}$$

• On a :

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt && \text{donc :} \\ &= [\sin]_0^{\frac{\pi}{2}} && \text{d'où :} \end{aligned}$$

$$w_1 = 1$$

2) ■ On a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{donc, en multipliant par } \cos^n t \geq 0 (n \in \mathbb{N}) :$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{n+1} t \leq \cos^n t \quad \text{d'où, en intégrant cette inégalité sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ les} \\ \text{fonctions étant continues sur cet intervalle :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} \leq w_n.$$

On peut finalement conclure :

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

Intégrales de Wallis

3) ■ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^n t \geq 0$$

donc, par positivité de l'intégrale, la fonction

$t \mapsto \cos^n t$ étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \geq 0$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0}$$

- La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, on peut alors conclure :

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

4) ■ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \cdot \cos t \, dt .$$

Les fonctions $t \mapsto \cos^{n+1} t (n \in \mathbb{N})$ et $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut alors écrire, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \cos t$, on dérive $t \mapsto \cos^{n+1} t$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = [\cos^{n+1} t \cdot \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t \, dt \quad \text{d'où,} \quad \text{comme}$$

$$\sin 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 :$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t \, dt}$$

- On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot (1 - \cos^2 t) \, dt \quad \text{soit encore :}$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n t - \cos^{n+2} t) \, dt \quad \text{donc, par linéarité de l'intégrale :}$$

Intégrales de Wallis

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt \text{ i.e. :}$$

$$= (n+1)w_n - (n+1)w_{n+2} \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n.$$

On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$$

5) ■ La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} \leq w_{n+1} \leq w_n \quad \text{donc, d'après le résultat de la question précédente:}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w^n > 0$. On peut donc conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$$

- La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement positive, on peut alors écrire, en divisant par w_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on peut donc écrire, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1.$$

On peut donc conclure :

$$w_{n+1} \sim w_n$$

Intégrales de Wallis

6) ■ La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement positive, on peut écrire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également strictement positive. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)w_{n+2}w_{n+1}}{(n+1)w_{n+1}w_n} = 1$$

$$\text{d'où, comme : } \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n :$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

On peut désormais conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante

- On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \quad \text{donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)w_{n+1}w_n = w_1w_0 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)w_{n+1}w_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc, comme } w_{n+1} \sim w_n :$$

$$(n+1)w_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où, comme } n+1 \sim n :$$

$$nw_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \quad \text{donc :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nw_n^2}{\pi} = 1 \quad \text{d'où, la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ étant continue en 1 :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} w_n = 1 \quad \text{soit finalement :}$$

$$w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$