Enoncés

Exercice 1. Calcul intégral

1) Soit I l'intégrale définie par :

$$I = \int_{10}^{15} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$$

- a) Justifier l'existence de I .
 b) Déterminer deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in [10, 15], \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

c) Déterminer la valeur de I .

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$I_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n dt.$$

- a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
 b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_n(x)$.

3) A l'aide du changement de variable $u = \tan \theta$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$

4) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale $\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right) \sin\left(x^2 - px + \frac{p}{2}\right) dx$.

Exercice 2. Convergence de suites d'intégrales

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On définit alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 f(t) dt.$$

1) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

2) On suppose maintenant que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = f(1).$$

3) On suppose que f est seulement continue sur $[0,1]$ et que $f(1)=0$.

a) Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^\alpha t^n f(t) dt = 0.$$

b) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\exists \alpha \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

c) En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d) Que peut-on dire si $f(1) \neq 0$?

Correction

Exercice 1.

1)a) La fonction $x \mapsto \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}$ étant continue sur $[10,15]$ comme fonction rationnelle définie sur $[10,15]$, on peut conclure :

Il est bien définie.

b) Soit $x \in [10,15]$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} &= \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} \Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A(2x+5) + B(x-3)}{(x-3)(2x+5)} \\ &\Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{(2A+B)x + (5A-3B)}{(x-3)(2x+5)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que A et B conviennent, il suffit donc l'on ait :

$$\begin{cases} 2A + B = -1 \\ 5A - 3B = 6 \end{cases} \quad \text{d'où après calculs :}$$

$$\begin{cases} A = \frac{3}{11} \\ B = -\frac{17}{11} \end{cases} \quad \text{soit finalement :}$$

$$\forall x \in [10,15], \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{3}{11} \times \frac{1}{x-3} - \frac{17}{11} \times \frac{1}{2x+5}$$

c) D'après le résultat de la question précédente et par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{11} \int_{10}^{15} \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11} \int_{10}^{15} \frac{dx}{2x+5} && \text{d'où} \\ &= \frac{3}{11} \left[\ln|x-3| \right]_{10}^{15} - \frac{17}{11} \left[\frac{\ln|2x+5|}{2} \right]_{10}^{15} \\ &= \frac{3}{11} [\ln(12) - \ln(7)] - \frac{17}{22} [\ln(35) - \ln(25)] && \text{soit finalement :} \end{aligned}$$

$$I = \frac{3}{11} \ln\left(\frac{12}{7}\right) - \frac{17}{22} \ln\left(\frac{7}{5}\right)$$

2)a) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^{n+1}$ étant de classe C^1 sur l'intervalle d'extrémités 1 et x , on obtient, à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_{n+1}(x) = \left[t(\ln t)^{n+1} \right]_1^x - (n+1) \int_1^x (\ln t)^n dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1}(x) = x(\ln x)^{n+1} - (n+1)I_n(x)$$

b) En multipliant le résultat précédent par $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^{n+1} I_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{x(-1)^{n+1} (\ln x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{(-1)^{n+1} I_n(x)}{n!}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{(-1)^{k+1} I_{k+1}(x)}{(k+1)!} = \frac{x(-1)^{k+1} (\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(-1)^k I_k(x)}{k!}$$

donc, en sommant ces relations :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} I_{k+1}(x)}{(k+1)!} = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k I_0(x)}{k!}$$

donc, les termes de la première et de la troisième somme s'annulent deux à deux et en posant $k'=k+1$ dans la deuxième somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(-1)^n I_n(x)}{n!} = x \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (\ln x)^k}{k!} + I_0(x)$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, I_0(x) = \int_1^x dt = x - 1$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(x) = x \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (\ln x)^k + n!(-1)^n(x-1)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(x) = x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (\ln x)^k - (-1)^n n!$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, I_0(x) = x - 1$, le cas $n=0$ rejoint le cas général, ce qui nous permet de conclure :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, I_n(x) = x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (\ln x)^k + (-1)^{n+1} n!$$

N.B. : on pouvait également procéder par récurrence, mais cela supposait que le résultat soit connu.

3) La fonction $\theta \mapsto \tan \theta$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{p}{4}\right]$ et telle que $\tan 0 = 0$ et $\tan \frac{p}{4} = 1$, on peut écrire, en effectuant le changement de variable $u = \tan q$ ($du = (1 + \tan^2 q) dq$) :

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{1 + \tan^2 q}{(1 + \tan^2 q)^2} dq \quad \text{d'où}$$

$$= \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{dq}{1 + \tan^2 q}$$

Comme : $\forall q \in \left[0, \frac{p}{4}\right], 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, on a donc :

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int_0^{\frac{p}{4}} \cos^2 q dq \quad \text{soit encore :}$$

$$= \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{\cos 2q + 1}{2} dq \quad \text{i.e. :}$$

$$= \left[\frac{\sin 2q}{4} + \frac{q}{2} \right]_0^{\frac{p}{4}} \quad \text{soit finalement :}$$

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{p+2}{8}$$

4) La fonction $x \mapsto x^2 - px + \frac{p}{2}$ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ donc on peut effectuer le changement de variable $u = x^2 - px + \frac{p}{2}$ ($du = (2x - p)dx = 2\left(x - \frac{p}{2}\right)dx$) et l'on obtient :

$$\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right) \sin\left(x^2 - px + \frac{p}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \sin u du \quad \text{d'où :}$$

$$\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right) \sin\left(x^2 - px + \frac{p}{2}\right) dx = 0$$

Exercice 2

1) Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est bornée sur ce segment. On peut alors écrire : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0,1], m \leq f(t) \leq M$ soit en multipliant par $t^n \geq 0 (n \in \mathbb{N})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], m t^n \leq t^n f(t) \leq M t^n$$

soit en intégrant sur $[0, 1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 t^n f(t) dt \leq M \int_0^1 t^n dt \quad \text{et donc, comme } \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \text{ et en reconnaissant } I_n :$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{m}{n+1} \leq I_n \leq \frac{M}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 0$, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f et $t \mapsto t^{n+1}$ étant de classe C^1 sur $[0, 1]$ à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto t^{n+1}$ et on dérive f), on trouve :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \quad \text{soit :} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(f(1) - \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \right) \quad \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n I_n = \frac{n}{n+1} \left(f(1) - \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \right).$$

Or, comme f est de classe C^1 sur $[0, 1]$, f' est continue sur $[0, 1]$. D'après le résultat de la question 1, on peut alors écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt = 0, \text{ d'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(1) - \int_0^1 t^{n+1} f'(t) dt \right) = f(1).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, on peut maintenant conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = f(1)$$

3) **a)** Comme f est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée sur ce segment. On peut alors écrire :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1], m \leq f(t) \leq M$$

soit en multipliant par $n t^n \geq 0 (n \in \mathbb{N})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], m t^n \leq n t^n f(t) \leq M t^n$$

soit en intégrant sur $[0, 1]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \int_0^1 t^n dt \leq n \int_0^1 t^n f(t) dt \leq M \int_0^1 t^n dt \quad \text{et donc, comme } \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} :$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \frac{n}{n+1} \alpha^{n+1} \leq n \int_0^\alpha t^n f(t) dt \leq M \frac{n}{n+1} \alpha^{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{n+1} = 0$ (car $\alpha \in]0, 1[$), on peut finalement conclure, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^a t^n f(t) dt = 0$$

b) f étant continue en 1, on peut écrire, comme $f(1)=0$:

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \forall t \in [\alpha, 1], |f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{donc, en multipliant par } n t^n \geq 0 :$$

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \forall t \in [\alpha, 1], \forall n \in \mathbb{N}, n |t^n f(t)| \leq \varepsilon \quad \text{donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur } [\alpha, 1] :$$

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \leq n \varepsilon \int_\alpha^1 t^n dt \quad \text{d'où :}$$

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \leq \frac{n}{n+1} (1-\alpha^{n+1}) \varepsilon \quad \text{et donc, comme : } \frac{n}{n+1} (1-\alpha^{n+1}) \leq 1 :$$

$$\leq \varepsilon.$$

Comme : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \right| \leq n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt$, on peut finalement conclure :

$$\exists a \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_a^1 t^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

c) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le résultat de la question précédente, on peut écrire qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon$.

De plus, d'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_0^1 t^n f(t) dt \right| = \left| n \int_0^\alpha t^n f(t) dt + n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \right| \quad \text{donc, d'après l'inégalité triangulaire :}$$

$$\leq \left| n \int_0^\alpha t^n f(t) dt \right| + \left| n \int_\alpha^1 t^n f(t) dt \right| \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| n \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq \left| n \int_0^\alpha t^n f(t) dt \right| + \varepsilon.$$

Par ailleurs, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^a t^n f(t) dt = 0$, on peut écrire par définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| n \int_0^\alpha t^n f(t) dt \right| \leq \varepsilon \quad \text{d'où :}$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| n \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon \quad \text{soit finalement, ce résultat étant valable pour un } \varepsilon \text{ quelconque de } \mathbb{R}_+^* :$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| n \int_0^1 t^n f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

Par définition de la limite, on peut finalement conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = 0$$

d) soit g la fonction définie par $\forall x \in [0,1], g(x) = f(x) - f(1)$. g est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues sur $[0,1]$, et l'on peut écrire, d'après le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^1 t^n g(t) dt = 0 \quad \text{soit encore, par définition de } g \text{ et par linéarité de l'intégration :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \int_0^1 t^n f(t) dt - f(1) n \int_0^1 t^n dt \right) = 0.$$

Or on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \int_0^1 t^n dt = \frac{n}{n+1}$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(1) n \int_0^1 t^n dt = f(1)$, ce qui nous permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = f(1)$$