Enoncés

Exercice 1. Calcul intégral

1) Soit I l'intégrale définie par :

$$I = \int_{10}^{15} \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} dx$$

a) Justifier l'existence de I.
b) Déterminer deux réels A et B tels que :
$\forall x \in [10,15],\ \dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{2x+5}$
c) Déterminer la valeur de I.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$I_n(x) = \int_1^x (\ln t)^n \, dt.$$

a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, un lien entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_n(x)$.

3) A l'aide du changement de variable $u = \tan\theta$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$

4) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^p \left(x - \frac{p}{2}\right)\sin\left(x^2 - p\,x + \frac{p}{2}\right)dx.$

Exercice 2. Convergence de suites d'intégrales

Soit f une fonction continue sur [0,1]. On définit alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 f(t)\,dt\ .$$

1) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

2) On suppose maintenant que f est de classe C^1 sur [0,1]. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(1).$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) On suppose que f est seulement continue sur $[0,1]$ et que $f(1)=0$.

a) Soit $\alpha\in]0,1[$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{a} t^n f(t)dt = 0 .$$

b) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\exists\alpha\in]0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|n\int_a^1 t^n f(t)dt\right| \le e .$$

c) En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Que peut-on dire si $f(1)\neq 0$?

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

Exercice 1.

1)a) La fonction $x \mapsto \dfrac{6-x}{(x-3)(2x+5)}$ étant continue sur [10,15] comme fonction rationnelle définie sur [10,15], on peut conclure :

$$\boxed{\text{I est bien définie.}}$$

b) Soit $x \in [10,15]$. On a :

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} \Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{(2A+B)x+(5A-3B)}{(x-3)(2x+5)}$$

Ainsi, pour que A et B conviennent, il suffit donc l'on ait :

$$\begin{cases} 2A + B = -1 \\ 5A - 3B = 6 \end{cases}$$ d'où après calculs :

$$\begin{cases} A = \dfrac{3}{11} \\ B = -\dfrac{17}{11} \end{cases}$$ soit finalement :

$$\boxed{\forall x \in [10,15],\quad \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{3}{11} \times \frac{1}{x-3} - \frac{17}{11} \times \frac{1}{2x+5}}$$

c) D'après le résultat de la question précédente et par linéarité de l'intégration, on a donc :

$$I = \frac{3}{11}\int_{10}^{15} \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11}\int_{10}^{15} \frac{dx}{2x+5}$$ d'où

$$= \frac{3}{11}\left[\ln|x-3|\right]_{10}^{15} - \frac{17}{11}\left[\frac{\ln|2x+5|}{2}\right]_{10}^{15}$$

$$= \frac{3}{11}\left[\ln(12) - \ln(7)\right] - \frac{17}{22}\left[\ln(35) - \ln(25)\right]$$ soit finalement :

$$\boxed{I = \frac{3}{11}\ln\left(\frac{12}{7}\right) - \frac{17}{22}\ln\left(\frac{7}{5}\right)}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2)a) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\ln t)^{n+1}$ étant de classe C^1 sur l'intervalle d'extrémités 1 et x, on obtient, à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_{n+1}(x) = \left[t(\ln t)^{n+1} \right]_1^x - (n+1)\int_1^x (\ln t)^n \, dt$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1}(x) = x(\ln x)^{n+1} - (n+1) I_n(x)}$$

b) En multipliant le résultat précédent par $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{n+1} I_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{x(-1)^{n+1}(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{(-1)^{n+1} I_n(x)}{n!}$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{k+1} I_{k+1}(x)}{(k+1)!} = \frac{x(-1)^{k+1}(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{(-1)^{k} I_k(x)}{k!}$$

donc, en sommant ces relations :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} I_{k+1}(x)}{(k+1)!} = x\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k} I_0(x)}{k!}$$

donc, les termes de la première et de la troisième somme s'annulant deux à deux et en posant k'=k+1 dans la deuxième somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{(-1)^n I_n(x)}{n!} = x\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (\ln x)^k}{k!} + I_0(x)$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $I_o(x) = \int_1^x dt = x - 1$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n(x) = x\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(\ln x)^k + n!(-1)^n(x-1)$$

d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n(x) = x\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(\ln x)^k - (-1)^n n!$$

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $I_0(x) = x - 1$, le cas n=0 rejoint le cas général, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n(x) = x\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(\ln x)^k + (-1)^{n+1} n!}$$

N.B. : on pouvait également procéder par récurrence, mais cela supposait que le résultat soit connu.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) La fonction $\theta \mapsto \tan\theta$ étant de classe C^1 sur $\left[0,\frac{p}{4}\right]$ et telle que tan0=0 et $\tan\frac{p}{4}=1$, on peut écrire, en effectuant le changement de variable u=tan? ($du=(1+\tan^2 q)dq$) :

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{1+\tan^2 q}{(1+\tan^2 q)^2}dq$$ d'où

$$= \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{dq}{1+\tan^2 q}$$

Comme : $\forall ? \in \left[0,\frac{p}{4}\right]$, $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$, on a donc :

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int_0^{\frac{p}{4}} \cos^2 q\, dq$$ soit encore :

$$= \int_0^{\frac{p}{4}} \frac{\cos 2q+1}{2}dq$$ i.e. :

$$= \left[\frac{\sin 2q}{4}+\frac{q}{2}\right]_0^{\frac{p}{4}}$$ soit finalement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{p+2}{8}}$$

4) La fonction $x \mapsto x^2 - px + \frac{p}{2}$ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc on peut effectuer le changement de variable $u = x^2 - px + \frac{p}{2}$ ($du = (2x-p)dx = 2\left(x-\frac{p}{2}\right)dx$) et l'on obtient :

$$\int_0^p \left(x-\frac{p}{2}\right)\sin\left(x^2-px+\frac{p}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \sin u\,du$$ d'où :

$$\boxed{\int_0^p \left(x-\frac{p}{2}\right)\sin\left(x^2-px+\frac{p}{2}\right)dx = 0}$$

Exercice 2

1) Comme f est continue sur [0,1], elle est bornée sur ce segment. On peut alors écrire : $\exists (m,M)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in[0,1], m\leq f(t)\leq M$ soit en multipliant par $t^n \geq 0 (n\in\mathbb{N})$:

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1], m\, t^n \le t^n f(t) \le M\, t^n$ soit en intégrant sur [0,1], les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$\forall n\in\mathbb{N}, m\int_0^1 t^n dt \le \int_0^1 t^n f(t)dt \le M\int_0^1 t^n dt$ et donc, comme $\int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$ et en reconnaissant I_n :

$\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{m}{n+1} \le I_n \le \dfrac{M}{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 0$, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites qui tendent vers 0. On en déduit alors (théorème de l'encadrement) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, les fonctions f et $t \mapsto t^{n+1}$ étant de classe C^1 sur [0,1] à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto t^n$ et on dérive f), on trouve :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t)dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f(t)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt$$ soit :

$$= \frac{1}{n+1}\left(f(1) - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt\right)$$ et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}, nI_n = \frac{n}{n+1}\left(f(1) - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt\right).$$

Or, comme f est de classe C^1 sur [0,1], f' est continue sur [0,1]. D'après le résultat de la question 1, on peut alors écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt = 0, \text{ d'où : } \lim_{n\to+\infty}\left(f(1) - \int_0^1 t^{n+1} f'(t)dt\right) = f(1).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = f(1)}$$

3) **a)** Comme f est continue sur [0,1], elle est bornée sur ce segment. On peut alors écrire :

$\exists (m,M)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in[0,1], m \le f(t) \le M$ soit en multipliant par $nt^n \ge 0 (n\in\mathbb{N})$:

$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1], m\, t^n \le nt^n f(t) \le M\, t^n$ soit en intégrant sur $[0,\alpha]$, les fonctions en présence étant continues sur cet intervalle :

$\forall n\in\mathbb{N}, m\int_0^a t^n dt \le n\int_0^a t^n f(t)dt \le M\int_0^a t^n dt$ et donc, comme $\int_0^a t^n dt = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$:

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n\in\mathbb{N}, m\dfrac{n}{n+1}\alpha^{n+1} \leq n\int_0^\alpha t^n f(t)dt \leq M\dfrac{n}{n+1}\alpha^{n+1}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1}=0$ (car $\alpha\in]0,1[$), on peut finalement conclure, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\int_0^a t^n f(t)dt = 0}$$

b) f étant continue en 1, on peut écrire, comme f(1)=0 :

$\exists\alpha\in]0,1[,\forall t\in[\alpha,1], |f(t)|\leq\varepsilon$ donc, en multipliant par n $t^n\geq 0$:

$\exists\alpha\in]0,1[,\forall t\in[\alpha,1],\forall n\in\mathbb{N}, n|t^n f(t)|\leq\varepsilon$ donc, par croissance de l'intégration, les fonctions en présence étant continues sur $[\alpha,1]$:

$\exists\alpha\in]0,1[,\forall n\in\mathbb{N}, n\int_\alpha^1 |t^n f(t)|dt\leq n\varepsilon\int_\alpha^1 t^n dt$ d'où :

$\exists\alpha\in]0,1[,\forall n\in\mathbb{N}, n\int_a^1 |t^n f(t)|dt\leq\dfrac{n}{n+1}(1-\alpha^{n+1})\varepsilon$ et donc, comme : $\dfrac{n}{n+1}(1-\alpha^{n+1})\leq 1$:

$\leq\varepsilon$.

Comme : $\forall n\in\mathbb{N}, \left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt\right|\leq n\int_\alpha^1 |t^n f(t)|dt$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\exists a\in]0,1[,\forall n\in\mathbb{N}, \left|n\int_a^1 t^n f(t)dt\right|\leq e.}$$

c) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. D'après le résultat de la question précédente, on peut écrire qu'il existe $\alpha\in]0,1[$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}, \left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt\right|\leq\varepsilon$.

De plus, d'après la relation de Chasles, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}, \left|n\int_0^1 t^n f(t)dt\right| = \left|n\int_0^\alpha t^n f(t)dt + n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt\right|$ donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$\leq \left|n\int_0^\alpha t^n f(t)dt\right| + \left|n\int_\alpha^1 t^n f(t)dt\right|$ d'où :

$\forall n\in\mathbb{N}, \left|n\int_0^1 t^n f(t)dt\right|\leq\left|n\int_0^\alpha t^n f(t)dt\right|+\varepsilon$.

Par ailleurs, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^a t^n f(t)\,dt = 0$,on peut écrire par définition de la limite :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, \left|n\int_0^\alpha t^n f(t)dt\right|\leq\varepsilon$ d'où :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, \left|n\int_0^1 t^n f(t)dt\right|\leq 2\varepsilon$ soit finalement, ce résultat étant valable pour un ε quelconque de $\mathbb{R}_+^*$:

$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, \left|n\int_0^1 t^n f(t)dt\right|\leq 2\varepsilon.$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Par définition de la limite, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = 0}$$

d) soit g la fonction définie par $\forall x\in[0,1], g(x)=f(x)-f(1)$. g est continue sur [0,1] comme somme de fonctions continues sur [0,1], et l'on peut écrire, d'après le résultat de la question précédente :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^1 t^n g(t)dt = 0$ soit encore, par définition de g et par linéarité de l'intégration :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\int_0^1 t^n f(t)dt - f(1)n\int_0^1 t^n dt \right) = 0 .$$

Or on a : $\forall n\in\mathbb{N}, n\int_0^1 t^n dt = \dfrac{n}{n+1}$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(1)n\int_0^1 t^n dt = f(1)$, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = f(1)}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021