

Fonctions et zéros

Méthode

1) Prouver qu'une fonction admet au moins un zéro

Pour montrer qu'une fonction f admet au moins un zéro sur un intervalle I de \mathbb{R} , on peut :

- si f est continue sur I , **déterminer $f(I)$** puis montrer que 0 appartient à I ,
- si f est continue sur une partie $]a, b[$ de I , montrer que $f(a)$ (ou limite de f en a) et $f(b)$ (ou limite de f en b) sont de signe opposé puis utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires**.

Attention par ces méthodes, on ne montre en aucun cas l'unicité du zéro de f .

2) Montrer qu'une équation admet une unique solution

Pour montrer qu'une équation de la forme $f(x)=a$ admet une unique solution dans un intervalle I de \mathbb{R} , on peut **montrer que f réalise une bijection de I sur $f(I)$** et que a appartient à $f(I)$ (en utilisant, éventuellement, le théorème des valeurs intermédiaires). On peut également, pour plus de simplicité, considérer l'équation $g(x)=0$, où g est la fonction définie par : $\forall x \in I, g(x) = f(x) - a$ et se ramener au point précédent.

3) Déterminer le nombre de solutions d'une équation

Pour déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme $f(x)=a$ sur un intervalle I de \mathbb{R} , on peut, si f est continue sur I , **étudier les variations de f** puis, sur chacun des **intervalles sur lesquels f est strictement monotone**, se référer au point précédent.