Fonctions et zéros

Méthode

1) Prouver qu'une fonction admet au moins un zéro

Pour montrer qu'une fonction f admet au moins un zéro sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut :

- si f est continue sur I, **déterminer f(I)** puis montrer que 0 appartient à I,
- si f est continue sur une partie]a, b[de I, montrer que f(a) (ou limite de f en a) et f(b) (ou limite de f en b) sont de signe opposé puis utiliser le **théorème des valeurs intermédiaires,**
- si f est la dérivée d'une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[(a et b appartenant à I, avec a<b), utiliser le **théorème de Rolle**.

Attention par ces méthodes, on ne montre en aucun cas l'unicité du zéro de f.

2) Montrer qu'une équation admet une unique solution

Pour montrer qu'une équation de la forme f(x)=a admet une unique solution dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut **montrer que f réalise une bijection de I sur f(I)** et que a appartient à f(I) (en utilisant, éventuellement, le théorème des valeurs intermédiaires). On peut également, pour plus de simplicité, considérer l'équation g(x)=0, où g est la fonction définie par : $\forall x \in I, g(x) = f(x) - a$ et se ramener au point précédent.

3) Déterminer le nombre de solutions d'une équation

Pour déterminer le nombre de solutions d'une équation de la forme f(x)=a sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on peut, si f est continue sur I, **étudier les variations de f** puis, sur chacun des **intervalles sur lesquels f est strictement monotone**, se référer au point précédent.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE