Etude générale

Méthode

I. Déterminer un encadrement d'une fonction, de sa limite

1) Majorer une fonction à l'aide des inégalités de convexité

Penser que si une fonction f est convexe (resp. concave) sur un intervalle **I** de $\mathbb{R}$, alors sa courbe représentative sur **I** est au dessus (resp. en dessous) de ses tangentes et en dessous (resp. au dessus) de ses cordes. Cette propriété des fonctions convexes et concaves permet, dans certains cas, d'obtenir un encadrement de f par des fonctions affines.

2) Déterminer un encadrement d'une fonction à l'aide de l'inégalité des accroissements finis

3) Déterminer un encadrement d'une fonction à l'aide d'une étude de fonction

4) Déterminer un majorant ou un minorant de la limite d'une fonction

Penser que, pour utiliser le théorème de prolongement des inégalités, il faut prouver au préalable que toutes les fonctions en présence dans l'inégalité admettent une limite. On obtient alors une **inégalité large** donnant un minorant, un majorant, ou un encadrement de la limite de la fonction.

II. Etudier les variations d'une fonction

1) Si la fonction est dérivable et si l'on peut calculer f '

Si f est dérivable sur **I** alors :

- f est croissante sur tout intervalle J de **I** sur lequel f' est positive,
- f est décroissante sur tout intervalle K de **I** sur lequel f' est négative,
- f est strictement monotone sur tout intervalle J de **I** sur lequel f' est de signe strictement constant **sauf un nombre dénombrable de points** (ainsi, une fonction peut être strictement monotone même si sa dérivée s'annule en un nombre infini de points).

Remarque : si f est continue sur [a, b] et monotone (resp. strictement monotone) sur]a, b[alors f est monotone (resp. strictement monotone) sur [a, b].

2) Si f est le produit, la somme ou la composée de fonctions de même monotonie

Penser que, si f est le produit, la somme ou la composée de fonctions dont on connaît la monotonie, on peut déterminer la monotonie de f.

3) A l'aide de la définition

Si f n'est pas dérivable sur I (ou si sa dérivée ne peut pas être calculée simplement), on peut étudier, pour tout couple (x_1, x_2) de réels de I tels que $x_1<x_2$, le signe de $f(x_2)-f(x_1)$:

- si $\forall(x_1,x_2)\in I^2,(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2))$, alors f est croissante sur I,
- si $\forall(x_1,x_2)\in I^2,(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)< f(x_2))$, alors f est strictement croissante sur I,
- si $\forall(x_1,x_2)\in I^2,(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2))$, alors f est décroissante sur I,
- si $\forall(x_1,x_2)\in I^2,(x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)> f(x_2))$, alors f est strictement décroissante sur I,

VII. Prouver qu'une fonction est convexe, concave

1) Si la fonction est de classe C^2

Penser qu'une fonction f de classe C^2 sur I est convexe (resp. concave) sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde est positive (resp. négative) sur I.

2) A l'aide de la définition

VIII. Prouver qu'une fonction induit une bijection

1) A l'aide de la définition

2) A l'aide des variations de la fonction

Penser que, si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de I sur f(I) qui est un intervalle (théorème parfois nommé "théorème de la bijection").

IX. Etudier la bijection réciproque d'une fonction

1) Monotonie

Se souvenir que la bijection réciproque d'une fonction f bijective de I dans J a la monotonie sur J de F sur I.

2) Continuité, dérivabilité

Se souvenir que la bijection réciproque d'une fonction f bijective de I dans J est continue (resp. dérivable) sur J si, et seulement si, f est continue (resp. dérivable et si sa dérivée ne s'annule pas) sur I. Si f^{-1} est dérivable sur J, on a alors :

$$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}.$$

3) Graphe

Se souvenir que le graphe de la bijection réciproque d'une fonction f bijective de I dans J est obtenu par symétrie de celle de f par rapport à la première bissectrice, d'équation y=x.

4) Détermination de la fonction réciproque

Si f est bijective de I dans J, on peut déterminer l'expression de f^{-1} à partir de l'égalité : f(x) = y ($x\in I$, $y\in J$) en exprimant x en fonction de y ($x=f^{-1}(y)$).

X. Représenter graphiquement une fonction

Afin de donner une allure réellement précise de la courbe représentative d'une fonction, il peut être utile, lorsque l'étude est simple, d'étudier les points suivants :

1) Tangentes

Penser que, si f est dérivable en a, f'(a) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f en (a, f(a)) et que, si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$, alors la courbe représentative de f admet une tangente verticale en (a, f(a)).

2) Eléments de symétrie

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Penser que :

- si, pour tout $x\in I,(2a-x)\in I$ et : $\forall x\in I, f(2a-x)=f(x)$, alors la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe d'équation x=a,

- si, pour tout $x\in I,(2a-x)\in I$ et : $\forall x\in I, f(2a-x)=2b-f(x)$, la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b).

3) Convexité et points d'inflexion

Penser que, si f est de classe C^2 sur I et si $\forall x\in \mathring{I}, f''(x)\geq 0$, alors f est convexe sur I et :

- sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes,
- sa courbe représentative est en-dessous de chacune des cordes qu'elle sous-tend.

Penser que, si f est de classe C^2 sur I, la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en (a, f(a)) (changement de convexité) si, et seulement, si f'' s'annule en changeant de signe en a.

4) Branches infinies

Soit f une fonction, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Penser que :

- Si $\lim_{b^{\pm}} f=\pm\infty\ (b\in\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_f$ admet une *asymptote verticale d'équation x=b.*

- Si $\lim_{b^{\pm}} f=b\ (b\in\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_f$ admet une *asymptote horizontale d'équation y=b.*

- Si $\lim\limits_{b^{\pm}} f = \pm\infty$,
  - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique verticale.
  - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique horizontale.
  - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a, \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$, il faut étudier la fonction $x \to f(x) - ax$,
    - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = b, \left(b \in \mathbb{R}\right)$, la droite d'équation y=ax+b est asymptote à $\mathcal{C}_f$,
    - si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right) = \pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une *branche parabolique* de direction la droite d'équation y=ax,
    - si $x \to \dfrac{f(x)}{x}$ et $x \to f(x) - ax$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ n'admet ni asymptote ni branche parabolique.