

Continuité, dérivabilité

Méthode

Attention aux notations employées pour parler de fonctions :

- ne pas parler de la "fonction $f(x)$ " : si f représente une fonction, $f(x)$ est un nombre, défini pour une valeur donnée de x .

I. Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe C^p , de classe C

1) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) continue

- En remarquant que la fonction est une somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non continues peut être une fonction continue.
- Penser qu'une fonction est continue sur un intervalle I de \mathbb{R} si, et seulement si, f est continue en tout point a de I . De plus, f est continue en a si, et seulement si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Attention ne pas confondre, quand f présente un problème de continuité en a , les expressions "f est continue en a " et "f est prolongeable par continuité en a " : si f est définie en a , elle ne peut y être prolongeable par continuité.

2) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) dérivable

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction ne peut être dérivable en un point que si elle est continue en ce point.
- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions dérivables. **Attention ...** La somme, le produit ou le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non dérivables peut être une fonction dérivable.
- f est dérivable en x_0 si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0 , ou si et seulement si $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.
- On peut également, si f est dérivable sur un voisinage de x_0 privé de x_0 , se ramener à la recherche d'une limite pour f' . Si f' admet une limite finie alors f est dérivable en x_0 (et même de classe C^1 , voir point 3). si f' admet une limite infinie, alors f n'est pas dérivable (à l'aide du théorème des accroissements finis). Si f' n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure.

3) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^1

Continuité, dérivabilité

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction f ne peut être de classe C^1 en un point que si elle est dérivable en ce point.
- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^1 .
- Pour montrer que la fonction f est de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} (avec un problème en a), il suffit de montrer successivement que :
 - f est continue sur $]a, b]$,
 - f est continue en a à droite,
 - f est de classe C^1 sur $]a, b]$,
 - f' admet une limite finie en a à droite.

On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 (qui permet d'éviter de chercher la limite d'un taux d'accroissement pour montrer que f est dérivable en a).

4) Montrer qu'une fonction (n'est pas) de classe C^p

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction f ne peut être de classe C^p en un point si l'une des dérivées $k^{\text{ème}}$ ($k \in \llbracket 0, p \rrbracket$) n'est pas continue en ce point.
- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^p .
- Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^p sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} (avec un problème en a), il suffit de montrer successivement que :
 - f est de classe C^p sur $]a, b]$
 - pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en a à droite.

On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p .

5) Montrer qu'une fonction (n'est pas) de classe C^∞

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^∞ .
- On peut, si la fonction présente un problème, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction considérée est de la classe C^n ou n fois dérivable.