

## Continuité, dérivabilité

### Méthode

#### Attention aux notations employées pour parler de fonctions :

- ne pas parler de la "fonction  $f(x)$ " : si  $f$  représente une fonction,  $f(x)$  est un nombre, défini pour une valeur donnée de  $x$ .

#### I. Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe $C^p$ , de classe $C$

##### 1) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) continue

- En remarquant que la fonction est une somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non continues peut être une fonction continue.
- Penser qu'une fonction est continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  si, et seulement si,  $f$  est continue en tout point  $a$  de  $I$ . De plus,  $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Attention .... ne pas confondre, quand  $f$  présente un problème de continuité en  $a$ , les expressions "f est continue en  $a$ " et "f est prolongeable par continuité en  $a$ " : si  $f$  est définie en  $a$ , elle ne peut y être prolongeable par continuité.**

##### 2) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) dérivable

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction ne peut être dérivable en un point que si elle est continue en ce point.
- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions dérivables. **Attention ...** La somme, le produit ou le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non dérivables peut être une fonction dérivable.
- $f$  est dérivable en  $x_0$  si, et seulement si, la fonction  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie en  $x_0$ , ou si et seulement si  $h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  admet une limite finie en 0.
- On peut également, si  $f$  est dérivable sur un voisinage de  $x_0$  privé de  $x_0$ , se ramener à la recherche d'une limite pour  $f'$ . Si  $f'$  admet une limite finie alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  (et même de classe  $C^1$ , voir point 3). si  $f'$  admet une limite infinie, alors  $f$  n'est pas dérivable (à l'aide du théorème des accroissements finis). Si  $f'$  n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure.

##### 3) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe $C^1$

## Continuité, dérivabilité

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction  $f$  ne peut être de classe  $C^1$  en un point que si elle est dérivable en ce point.
- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe  $C^1$ .
- Pour montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (avec un problème en  $a$ ), il suffit de montrer successivement que :
  - $f$  est continue sur  $]a, b]$ ,
  - $f$  est continue en  $a$  à droite,
  - $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]a, b]$ ,
  - $f'$  admet une limite finie en  $a$  à droite.

On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe  $C^1$  (qui permet d'éviter de chercher la limite d'un taux d'accroissement pour montrer que  $f$  est dérivable en  $a$ ).

4) Montrer qu'une fonction (n'est pas) de classe  $C^p$ 

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction  $f$  ne peut être de classe  $C^p$  en un point si l'une des dérivées  $k^{\text{ème}}$  ( $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ) n'est pas continue en ce point.
- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe  $C^p$ .
- Pour montrer qu'une fonction  $f$  est de classe  $C^p$  sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (avec un problème en  $a$ ), il suffit de montrer successivement que :
  - $f$  est de classe  $C^p$  sur  $]a, b]$
  - pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$ ,  $f^{(k)}$  admet une limite finie en  $a$  à droite.

On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe  $C^p$ .

5) Montrer qu'une fonction (n'est pas) de classe  $C^\infty$ 

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe  $C^\infty$ .
- On peut, si la fonction présente un problème, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction considérée est de la classe  $C^n$  ou  $n$  fois dérivable.