Continuité, dérivabilité

Méthode

Attention aux notations employées pour parler de fonctions :

- ne pas parler de la "fonction f(x)" : si f représente une fonction, f(x) est un nombre, défini pour une valeur donnée de x.

I. Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe C^p, de classe C^∞

1) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) continue

■ En remarquant que la fonction est une somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non continues peut être une fonction continue.

■ Penser qu'une fonction est continue sur un intervalle **I** de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f est continue en tout point a de **I**. De plus, f est continue en a si, et seulement si : $\lim_{x \to a} = f(x) = f(a)$.

Attention …. ne pas confondre, quand f présente un problème de continuité en a, les expressions "f est continue en a" et "f est prolongeable par continuité en a" : si f est définie en a, elle ne peut y être prolongeable par continuité.

2) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) dérivable

■ Condition nécessaire : penser qu'une fonction ne peut être dérivable en un point que si elle est continue en ce point.

■ En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions dérivables. **Attention …** La somme, le produit ou le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non dérivables peut être une fonction dérivable.

■ f est dérivable en x_0 si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0, ou si et seulement si $h \mapsto \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.

■ On peut également, si f est dérivable sur un voisinage de x_0 privé de x_0, se ramener à la recherche d'une limite pour f'. Si f' admet une limite finie alors f est dérivable en x_0 (et même de classe C^1, voir point **3**). si f' admet une limite infinie, alors f n'est pas dérivable (à l'aide du théorème des accroissements finis). Si f' n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure.

3) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^1

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction f ne peut être de classe C^1 en un point que si elle est dérivable en ce point.

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^1.

- Pour montrer que la fonction f est de classe C^1 sur un intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$ (avec un problème en a), il suffit de montrer successivement que :

  - f est continue sur]a, b],
  - f est continue en a à droite,
  - f est de classe C^1 sur]a, b],
  - f' admet une limite finie en a à droite.

  On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 (qui permet d'éviter de chercher la limite d'un taux d'accroissement pour montrer que f est dérivable en a).

4) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^p

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction f ne peut être de classe C^p en un point si l'une des dérivées $k^{ème}$ ($k \in [\![0, p]\!]$) n'est pas continue en ce point.

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^p.

- Pour montrer qu'une fonction f est de classe C^p sur un intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$ (avec un problème en a), il suffit de montrer successivement que :
  - f est de classe C^p sur]a, b]
  - pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)}$ admet une limite finie en a à droite.

On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe C^p.

5) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^∞

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^∞.

- On peut, si la fonction présente un problème, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction considérée est de la classe C^n ou n fois dérivable.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021