Vecteurs aléatoires discrets

Enoncés

Exercice 1

Soient $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de clients d'un marchand de fruits et légumes un jour donné. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et que chaque client achète des fruits avec une probabilité p et des légumes avec une probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que les clients ne peuvent acheter à la fois des fruits et des légumes). On suppose que les achats des différents clients sont indépendants.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des fruits et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des légumes.

1) Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

2) **a)** Déterminer les lois marginales de X et de Y.

b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? En déduire $\text{cov}(X,Y)$ et $E(XY)$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et $p \in]0,1[$. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2) La secrétaire rappelle une seconde fois, et dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qu'elle n'a pu joindre au cours de la première série d'appels. Soient alors Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels et $Z = X + Y$ la variable aléatoire égale au nombre total de correspondants obtenus lors de ces deux séries d'appels.

a) Déterminer, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.

b) Déterminer la loi de Z et montrer que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 3

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans une partie de $\mathbb{N}$ et A un événement de l'espace probabilisé considéré, tel que $p(A) \neq 0$.

Sous réserve d'existence, on appelle espérance de la variable aléatoire X conditionnée par l'événement A et on note $E(X/A)$ le réel défini par :

$$E(X/A) = \sum_{k \in X(\Omega)} k p\left([X = k]/A\right).$$

1) Soient X une variable aléatoire et A un événement vérifiant les hypothèses précédentes. On suppose en outre que $p(A) \neq 1$ et que X admet une espérance.

a) Montrer que $E(X/A)$ et $E(X/\overline{A})$ existent.

b) Etablir que :

$$E(X) = p(A)E(X/A) + p\left(\overline{A}\right)E\left(X/\overline{A}\right)$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation similaire peut-on déterminer si X admet un moment d'ordre k?

2) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ prenant toutes leurs valeurs avec une probabilité non nulle. On suppose que Y admet une espérance.

a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}, E\left(Y/[X = i]\right)$ existe.

b) Etablir que :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X = i) E\left(Y/[X = i]\right),$$

(on pourra inverser les deux sommes).

c) Quelle relation similaire peut-on déterminer si Y admet un moment d'ordre k $(k \in \mathbb{N}^*)$?

Exercice 4

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note G_X la fonction :
$t \mapsto G_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)t^k$ (lorsque $X(\Omega)$ est fini, G_X est définie sur $\mathbb{R}$ et lorsque $X(\Omega)$ est infini, G_X est au moins définie sur $[-1,1]$).

1) Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1\le i\le p}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $[\![0,n]\!]$. En remarquant que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = E(t^X)$, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{p} X_i} = \prod_{i=1}^{p} G_{X_i}(t).$$

2) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. En remarquant que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a : $\forall t \in [-1,1], G_X(t) = E(t^X)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1,1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t).$$

Correction

Exercice 1

1) D'après l'énoncé, on a clairement : $(X,Y)(\Omega)=\mathbb{N}^2$. De plus, comme X+Y=N (chacun des clients achetant des fruits ou des légumes), on a également :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, p\left([X=i]\cap[Y=j]\right)=p\left([X=i]\cap[N-X=j]\right)$$ d'où

$$=p\left([X=i]\cap[N=i+j]\right)$$ soit, d'après la formule des probabilités composées :

$$=p\left(X=i/N=i+j\right)p(N=i+j).$$

Or, comme chaque client achète des fruits avec une probabilité p, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, sachant que le nombre total de clients N est égal à i+j, X suit une loi binomiale de paramètres i+j et p. On peut alors écrire :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, p\left(X=i/N=i+j\right)=C_{i+j}^{i}p^iq^j.$$

De plus, comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ, on peut également écrire :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, p(N=i+j)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

On en déduit alors :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, p\left([X=i]\cap[Y=j]\right)=C_{i+j}^{i}p^iq^j\bullet e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$$ soit :

$$=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\frac{(\lambda q)^j}{j!}.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{(X,Y)(\Omega)=\mathbb{N}^2 \text{ et } \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2, p\left([X=i]\cap[Y=j]\right)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\frac{(\lambda q)^j}{j!}}$$

2) **a)** ∘ On a : $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Comme on a également $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\forall i\in\mathbb{N}, [X=i]=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\left([X=i]\cap[Y=j]\right)$$ soit, en passant aux probabilités :

$\forall i \in \mathbb{N}, p(X = i) = p\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}([X = i] \cap [Y = j])\right)$ soit encore, l'union étant disjointe (il ne peut y avoir simultanément un jour donné j et j' clients achetant des légumes avec $j \neq j'$) :

$= \sum_{j\in\mathbb{N}} p\left([X = i] \cap [Y = j]\right)$ et donc, d'après les résultats de la question précédente :

$= \sum_{j\in\mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ i.e. :

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ soit enfin, en reconnaissant la somme d'une série exponentielle :

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{\lambda q}$ et donc :

$= e^{-\lambda(1-q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!}$ d'où, comme 1-q=p :

$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}$.

∘ X et Y munis de leurs paramètres respectifs p et q jouant des rôles symétriques, on peut également écrire : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall i \in \mathbb{N}, p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!}$. On peut désormais conclure que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq, i.e. :

$$\boxed{x \ \ \mathcal{P}(\lambda p) \text{ et } X \ \ \mathcal{P}(\lambda q), \text{ i.e. : } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, \begin{cases} p(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\ p(Y=i)=e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!} \end{cases}}$$

b) ∘ On en déduit alors :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p(X = i)\ p(Y = j) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \bullet e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{j!}$ i.e. :

$= e^{-\lambda(p+q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$ soit, comme p+q=1 :

$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^i}{j!}$ i.e. :

$= p\left([X = i] \cap [Y = j]\right)$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{X et Y sont donc indépendantes}}$$

- Comme X et Y sont indépendantes, on peut alors écrire :

  $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ et $E(XY)=E(X)E(Y)$.

  Or, comme X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq, on peut écrire : $E(X)=\lambda p$ et $E(Y)=\lambda q$, d'où la conclusion :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=0 \text{ et } E(XY)=\lambda^2 pq}$$

Exercice 2

1) Comme X est le nombre de correspondants obtenus, X représente le nombre de succès (obtenir un correspondant) lors de la réalisation de n essais indépendants (n coups de téléphone) d'une expérience à deux issues possibles (joindre ou ne pas joindre le correspondant) dont la probabilité de succès est p. X suit donc une loi binomiale de paramètre n et p.

On en déduit alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \text{, i.e. : } X(\Omega)=[\![0,n]\!] \text{ et } \forall k\in[\![0,n]\!]\ p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\text{, d'où :} \\ E(X)=np \text{ et } V(X)=np(1-p)\end{array}}$$

2) **a)** Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, si X=i, lors de la seconde série d'appels, la secrétaire rappelle les n-i correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre lors de la première série, et ce dans les mêmes conditions que précédemment.

On déduit alors que si $X=i$ ($i\in[\![0,n]\!]$), Y suit une loi binomiale de paramètres n-i et p, d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall i\in[\![0,n]\!],\ \forall k\in[\![0,n-i]\!],\ p\left(Y=k/X=i\right)=C_{n-i}^k p^k(1-p)^{n-i-k}}$$

b) ○ Comme Z est le nombre total de correspondants joints à l'issue de la seconde série d'appels, on a clairement : $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$. De plus, comme Z=X+Y, on a :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ [Z=k]=\bigcup_{i=0}^{k}\left([X=i]\cap[Y=k-i]\right)$$ d'où en passant aux probabilités :

$\forall k \in [\![0,n]\!], p(Z=k) = p\left(\bigcup_{i=0}^{k}([X=i]\cap[Y=k-i])\right)$ soit, l'union étant disjointe (on ne peut avoir simultanément [X=i] et [X=i'] avec $i \neq i'$) :

$= \sum_{i=0}^{k} p([X=i]\cap[Y=k-i])$ soit encore, d'après la formule des probabilités composées :

$= \sum_{i=0}^{k} p\left(Y=k-i \middle/ X=i\right) p(X=i)$ et donc, d'après les résultats précédents :

$= \sum_{i=0}^{k} C_{n-i}^{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k} \times C_n^i p^i (1-p)^{n-i}$ i.e. :

$= \sum_{i=0}^{k} C_n^i C_{n-i}^{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$ et comme $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $C_n^i C_{n-i}^{k-i} = C_n^k C_k^i$:

$= C_n^k p^k (1-p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i (1-p)^{k-i}$ soit encore, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$= C_n^k p^k (1-p)^{2n-2k} (2-p)^k$ d'où la conclusion :

$$\boxed{Z(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!]\ p(Z=k) = C_n^k (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}}$$

◦ Comme $p(2-p)+(1-p)^2=1$, on peut maintenant écrire que Z suit une loi binomiale de paramètres n et p(2-p), i.e. :

$$\boxed{Z \quad \mathcal{B}(n,p(2-p))}$$

Exercice 3

1) **a)** ◦ On a :

$\forall k \in X(\Omega), p\left([X=k] \middle/ A\right) = \dfrac{p([X=k]\cap A)}{p(A)}$ d'où comme : $p([X=k]\cap A) \leq p(X=k)$ (car $([X=k]\cap A) \subset [X=k]$) :

$\forall k \in X(\Omega), p\left([X=k] \middle/ A\right) \leq \dfrac{p(X=k)}{p(A)}$ donc :

$\forall k \in X(\Omega), 0 \leq kp\left([X=k] \middle/ A\right) \leq k\dfrac{p(X=k)}{p(A)}$.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

Or, comme X admet une espérance, la série de terme général kp(X=k) est convergente, donc comme p(A) est indépendant de k, d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $kp\left([X=k]/A\right)$ converge. On peut donc conclure :

$$\boxed{E\left(X/A\right) \text{ existe}}$$

- De même, comme : $\forall k \in X(\Omega), 0 \leq p\left([X=k]/\overline{A}\right) \leq \frac{p(X=k)}{p(\overline{A})}$, et comme X admet une espérance, on peut conclure :

$$\boxed{E\left(X/\overline{A}\right) \text{ existe}}$$

b) Comme X admet une espérance, on peut écrire :

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kp(X=k)$ soit, d'après la formule des probabilités totales, la famille $(A, \overline{A})$ étant un système complet d'événements de probabilités non nulles :

$= \sum_{k \in X(\Omega)} k\left(p(A)p\left([X=k]/A\right) + p(\overline{A})p\left([X=k]/\overline{A}\right)\right)$ d'où comme les séries de termes généraux respectifs $kp\left([X=k]/A\right)$ et $kp\left([X=k]/\overline{A}\right)$ convergent (car $E\left(X/A\right)$ et $E\left(X/\overline{A}\right)$ existent) :

$= p(A)\sum_{k \in X(\Omega)} kp\left([X=k]/A\right) + p(\overline{A})\sum_{k \in X(\Omega)} kp\left([X=k]/\overline{A}\right)$ soit finalement :

$$\boxed{E(X) = p(A)E\left(X/A\right) + p(\overline{A})E\left(X/\overline{A}\right)}$$

c) On montrerait, par un raisonnement analogue, que, si X admet un moment d'ordre k, alors $E(X^k/A)$ et $E(X^k/\overline{A})$ existent, puis que :

$$\boxed{E(X^k) = p(A)E\left(X^k/A\right) + p(\overline{A})E\left(X^k/\overline{A}\right)}$$

2) a) Soit $i \in X(\Omega)$. Comme $p(X=i) \neq 0$, en substituant $[X=i]$ à A et Y à X dans le raisonnement de la question 1.a, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in X(\Omega), E\left(Y/_{[X=i]}\right) \text{ existe}}$$

b) Comme Y admet une espérance et comme Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(Y=k)$ soit, d'après la formule des probabilités totales, la famille $(X=i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements tous de probabilités non nulles :

$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(k\sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i)p\left([Y=k]/_{[X=i]}\right)\right)$ soit, l'inversion des sommes infinies étant autorisées car Y admet une espérance :

$= \sum_{i=0}^{+\infty}\left(p(X=i)\sum_{k=o}^{+\infty} kp\left([Y=k]/_{[X=i]}\right)\right)$ d'où, comme, pour tout $i \in X(\Omega), E\left(Y/_{[X=i]}\right)$ existe:

$$\boxed{E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i)E\left(Y/_{[X=i]}\right)}$$

c) On montrerait, par un raisonnement analogue, que, si Y admet un moment d'ordre k, alors pour tout $i \in X(\Omega)$, $E\left(Y^k/_{[X=i]}\right)$ existe, puis que :

$$\boxed{E(Y^k) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i)E\left(Y^k/_{(X=i]}\right)}$$

Exercice 4

1) Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto t^x$ est définie en tout point de $\mathbb{N}$, donc en tout point de $[\![0,n]\!]$, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, E(t^X)$ existe, on a (théorème de transfert):

$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = E(t^X)$ donc :

$$= \sum_{k=0}^{n} p(X=k)t^k .$$

Or, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on a également : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p(X=k)t^k$, donc, en reconnaissant $E(t^X)$, pour tout $t \in \mathbb{R}, E(t^X)$ existe et : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = E(t^X)$.

Montrons, par montée fine, que si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \le i \le p}$ à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ sont mutuellement indépendantes, alors : $\forall k \in [\![2,p]\!], \forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t)$.

- Si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \le i \le p}$ sont mutuellement indépendantes, alors X_1 et X_2 sont indépendantes, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}, t^{X_1}$ et t^{X_2} sont indépendants. On peut alors écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, E(t^{X_1} t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$, soit: $\forall t \in \mathbb{R}, E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$.

  En utilisant la remarque précédente, on en déduit alors : $\forall t \in \mathbb{R}, G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$. La propriété est donc bien vérifiée au rang k=2.

- Soit $k \in [\![2,p-1]\!]$ (si $p \geq 3$), supposons que : $\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t)$. Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \le i \le p}$ étant mutuellement indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires $t^{\sum_{i=1}^{k} X_i}$ et $t^{X_{k+1}}$ sont également indépendantes, d'où :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, E\left(t^{\sum_{i=1}^{k} X_i} t^{X_{k+1}}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{k} Xi}\right)E(t^{X_{k+1}})$$ i.e. :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, E\left(t^{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^{k} X_i}\right)E(t^{X_{k+1}})$$ ce qui s'écrit encore, d'après la remarque précédente :

$\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) G_{X_{k+1}}(t)$ et donc, d'après l'hypothèse :

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t)\right) G_{X_{k+1}}(t) \quad \text{i.e. :}$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}(t) .$$

- Ainsi, on a bien : $\forall k \in [\![2, p]\!], \forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t)$.

On peut alors conclure, pour k=p :

> Si $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes
> à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t)$

2) Comme pour tout $t \in [-1,1]$, l'application $x \mapsto t^x$ est définie en tout point de $\mathbb{N}$, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, E(t^X)$ existe, on a (théorème de transfert) : $\forall t \in [-1,1], E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k) t^k$.

Or, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X est au moins définie sur $[-1,1]$ et on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k) t^k$. Ainsi, la série de terme général $p(X=k)t^k$ converge absolument donc $E(t^X)$ existe et l'on a :

$\forall t \in [-1,1], G_X(t) = E(t^X)$.

Montrons alors par récurrence, que si les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont mutuellement indépendantes, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1,1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$.

- Au rang n=1, on a clairement : $\forall t \in [-1,1], G_{X_1}(t) = G_{X_1}(t)$. La propriété est donc bien vérifiée au rang 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\forall t \in [-1,1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$.

Les variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ étant mutuellement indépendantes, il est clair que pour tout $t\in[-1,1]$, les variables aléatoires $t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ et $t^{X_{n+1}}$ sont indépendantes, d'où :

$$\forall t\in[-1,1], E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\, t^{X_{n+1}}\right)=E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)E(t^{X_{n+1}}) \text{ i.e. :}$$

$$\forall t\in[-1,1], E\left(t^{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right)=E\left(t^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)E(t^{X_{n+1}})$$

ce qui s'écrit encore, d'après la remarque précédente :

$$\forall t\in[-1,1], G_{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}(t)=G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)G_{X_{n+1}}(t)$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$=\left(\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)\right)G_{X_{n+1}}(t)$$

i.e. :

$$=\prod_{i=1}^{n+1} G_{X_i}(t).$$

- Ainsi, on a bien : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[-1,1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$, d'où la conclusion :

> Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes
>
> à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall t\in[-1,1], G_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t)=\prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t)$.