

## Enoncés

### Exercice 1

Soient  $\lambda \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $N$  la variable aléatoire égale au nombre de clients d'un marchand de fruits et légumes un jour donné. On suppose que  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et que chaque client achète des fruits avec une probabilité  $p$  et des légumes avec une probabilité  $q = 1 - p$  (on suppose que les clients ne peuvent acheter à la fois des fruits et des légumes). On suppose que les achats des différents clients sont indépendants.

Soient  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des fruits et  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des légumes.

- 1) Déterminer la loi conjointe de  $(X, Y)$ .
- 2) a) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .  
b) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes? En déduire  $\text{cov}(X, Y)$  et  $E(XY)$ .

### Exercice 2

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $p \in ]0, 1[$ . Une secrétaire effectue  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  correspondants distincts. On admet que les appels constituent  $n$  expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$ . Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

- 1) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
- 2) La secrétaire rappelle une seconde fois, et dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qu'elle n'a pu joindre au cours de la première série d'appels. Soient alors  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels et  $Z = X + Y$  la variable aléatoire égale au nombre total de correspondants obtenus lors de ces deux séries d'appels.
  - a) Déterminer, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = i]$ .
  - b) Déterminer la loi de  $Z$  et montrer que  $Z$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**Exercice 3**

Soient  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans une partie de  $\mathbb{N}$  et  $A$  un événement de l'espace probabilisé considéré, tel que  $p(A) \neq 0$ .

Sous réserve d'existence, on appelle espérance de la variable aléatoire  $X$  conditionnée par l'événement  $A$  et on note  $E(X/A)$  le réel défini par :

$$E(X/A) = \sum_{k \in X(\Omega)} kp([X = k]/A).$$

1) Soient  $X$  une variable aléatoire et  $A$  un événement vérifiant les hypothèses précédentes. On suppose en outre que  $p(A) \neq 1$  et que  $X$  admet une espérance.

a) Montrer que  $E(X/A)$  et  $E(X/\bar{A})$  existent.

b) Etablir que :

$$E(X) = p(A)E(X/A) + p(\bar{A})E(X/\bar{A})$$

c) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Quelle relation similaire peut-on déterminer si  $X$  admet un moment d'ordre  $k$ ?

2) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  prenant toutes leurs valeurs avec une probabilité non nulle. On suppose que  $Y$  admet une espérance.

a) Montrer que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $E(Y/[X = i])$  existe.

b) Etablir que :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X = i)E(Y/[X = i]),$$

(on pourra inverser les deux sommes).

c) Quelle relation similaire peut-on déterminer si  $Y$  admet un moment d'ordre  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ )?

**Exercice 4**

Pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on note  $G_x$  la fonction :

$t \mapsto G_x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k)t^k$  (lorsque  $X(\Omega)$  est fini,  $G_x$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et lorsque  $X(\Omega)$  est infini,  $G_x$  est au moins définie sur  $[-1, 1]$ ).

- 1) Soient  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $[[0, n]]$ . En remarquant que, pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $[[0, n]]$ , on a :  $\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = E(t^X)$ , montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^p X_i} = \prod_{i=1}^p G_{X_i}(t).$$

- 2) Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . En remarquant que, pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a :  $\forall t \in [-1, 1], G_x(t) = E(t^X)$ , montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t).$$

## Correction

**Exercice 1**

- 1) D'après l'énoncé, on a clairement :  $(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^2$ . De plus, comme  $X+Y=N$  (chacun des clients achetant des fruits ou des légumes), on a également :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) &= p([X = i] \cap [N - X = j]) && \text{d'où} \\ &= p([X = i] \cap [N = i + j]) && \text{soit, d'après la formule des} \\ &= p\left(X = \cancel{i} / N = i + j\right) p(N = i + j). && \text{probabilités composées :} \end{aligned}$$

Or, comme chaque client achète des fruits avec une probabilité  $p$ , pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , sachant que le nombre total de clients  $N$  est égal à  $i+j$ ,  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $i+j$  et  $p$ . On peut alors écrire :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p\left(X = \cancel{i} / N = i + j\right) = C_{i+j}^i p^i q^j.$$

De plus, comme  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , on peut également écrire :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p(N = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) &= C_{i+j}^i p^i q^j \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} && \text{soit :} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}. \end{aligned}$$

On peut désormais conclure :

$$(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^2 \text{ et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

- 2) a) On a :  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . Comme on a également  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ , on peut écrire :

$$\forall i \in \mathbb{N}, [X = i] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([X = i] \cap [Y = j]) \quad \text{soit, en passant aux probabilités :}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, p(X = i) = p\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([X = i] \cap [Y = j])\right)$$

soit encore, l'union étant disjointe (il ne peut y avoir simultanément un jour donné  $j$  et  $j'$  clients achetant des légumes avec  $j \neq j'$ ) :

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} p([X = i] \cap [Y = j])$$

et donc, d'après les résultats de la question précédente :

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

i.e. :

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

soit enfin, en reconnaissant la somme d'une série exponentielle :

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{\lambda q}$$

et donc :

$$= e^{-\lambda(1-q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!}$$

d'où, comme  $1-q=p$  :

$$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}.$$

o  $X$  et  $Y$  munis de leurs paramètres respectifs  $p$  et  $q$  jouant des rôles symétriques, on peut également écrire :  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall i \in \mathbb{N}, p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!}$ . On peut désormais conclure que  $X$  et  $Y$  suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda p$  et  $\lambda q$ , i.e. :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda p) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\lambda q), \text{ i.e. : } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, \begin{cases} p(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\ p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!} \end{cases}$$

b) o On en déduit alors :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p(X = i) p(Y = j) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \quad \text{i.e. :}$$

$$= e^{-\lambda(p+q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \quad \text{soit, comme } p+q=1 :$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \quad \text{i.e. :}$$

$$= p([X = i] \cap [Y = j]).$$

On peut donc conclure :

X et Y sont donc indépendantes

- o Comme X et Y sont indépendantes, on peut alors écrire :

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \text{ et } E(XY) = E(X)E(Y).$$

Or, comme X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda p$  et  $\lambda q$ , on peut écrire :  $E(X) = \lambda p$  et  $E(Y) = \lambda q$ , d'où la conclusion :

$\text{cov}(X, Y) = 0 \text{ et } E(XY) = \lambda^2 pq$

### Exercice 2

- 1) Comme X est le nombre de correspondants obtenus, X représente le nombre de succès (obtenir un correspondant) lors de la réalisation de n essais indépendants (n coups de téléphone) d'une expérience à deux issues possibles (joindre ou ne pas joindre le correspondant) dont la probabilité de succès est p. X suit donc une loi binomiale de paramètre n et p.

On en déduit alors :

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , i.e. :  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ , d'où :  
 $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$

- 2) a) Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , si  $X=i$ , lors de la seconde série d'appels, la secrétaire rappelle les n-i correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre lors de la première série, et ce dans les mêmes conditions que précédemment.

On déduit alors que si  $X = i$  ( $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ), Y suit une loi binomiale de paramètres n-i et p, d'où la conclusion :

$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket, p(Y = k / X = i) = C_{n-i}^k p^k (1-p)^{n-i-k}$

- b) o Comme Z est le nombre total de correspondants joints à l'issue de la seconde série d'appels, on a clairement :  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ . De plus, comme  $Z=X+Y$ , on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, [Z = k] = \bigcup_{i=0}^k ([X = i] \cap [Y = k - i]) \quad \text{d'où en passant aux probabilités :}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p(Z = k) = p\left(\bigcup_{i=0}^k ([X = i] \cap [Y = k - i])\right)$$

$$= \sum_{i=0}^k p([X = i] \cap [Y = k - i])$$

$$= \sum_{i=0}^k p\left(Y = k - i \middle| X = i\right) p(X = i)$$

$$= \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k} \times C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \text{ i.e. :}$$

$$= \sum_{i=0}^k C_n^i C_{n-i}^{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^k C_k^i (1-p)^{k-i}$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{2n-2k} (2-p)^k$$

soit, l'union étant disjointe (on ne peut avoir simultanément  $[X=i]$  et  $[X=i']$  avec  $i \neq i'$ ) :

soit encore, d'après la formule des probabilités composées :

et donc, d'après les résultats précédents :

et comme  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket,$

$$C_n^i C_{n-i}^{k-i} = C_n^k C_k^i :$$

soit encore, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

d'où la conclusion :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p(Z=k) = C_n^k (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}$$

o Comme  $p(2-p) + (1-p)^2 = 1$ , on peut maintenant écrire que  $Z$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p(2-p)$ , i.e. :

$$Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$$

### Exercice 3

1) a) o On a :

$$\forall k \in X(\Omega), p\left(\frac{[X = k]}{A}\right) = \frac{p([X = k] \cap A)}{p(A)}$$

d'où comme :  $p([X = k] \cap A) \leq p(X = k)$

(car  $([X = k] \cap A) \subset [X = k]$ ) :

$$\forall k \in X(\Omega), p\left(\frac{[X = k]}{A}\right) \leq \frac{p(X = k)}{p(A)}$$

donc :

$$\forall k \in X(\Omega), 0 \leq kp\left(\frac{[X = k]}{A}\right) \leq k \frac{p(X = k)}{p(A)} .$$

Or, comme  $X$  admet une espérance, la série de terme général  $kp(X=k)$  est convergente, donc comme  $p(A)$  est indépendant de  $k$ , d'après les théorèmes de comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général  $kp\left(\frac{[X=k]}{A}\right)$  converge. On peut donc conclure :

$$E\left(\frac{X}{A}\right) \text{ existe}$$

◦ De même, comme :  $\forall k \in X(\Omega), 0 \leq p\left(\frac{[X=k]}{A}\right) \leq \frac{p(X=k)}{p(A)}$ , et comme  $X$  admet une espérance, on peut conclure :

$$E\left(\frac{X}{\bar{A}}\right) \text{ existe}$$

**b)** Comme  $X$  admet une espérance, on peut écrire :

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kp(X=k)$  soit, d'après la formule des probabilités totales, la famille  $(A, \bar{A})$  étant un système complet d'événements de probabilités non nulles :

$$= \sum_{k \in X(\Omega)} k \left( p(A)p\left(\frac{[X=k]}{A}\right) + p(\bar{A})p\left(\frac{[X=k]}{\bar{A}}\right) \right)$$

d'où comme les séries de termes généraux respectifs  $kp\left(\frac{[X=k]}{A}\right)$  et  $kp\left(\frac{[X=k]}{\bar{A}}\right)$  convergent (car  $E\left(\frac{X}{A}\right)$  et  $E\left(\frac{X}{\bar{A}}\right)$  existent) :

$$= p(A) \sum_{k \in X(\Omega)} kp\left(\frac{[X=k]}{A}\right) + p(\bar{A}) \sum_{k \in X(\Omega)} kp\left(\frac{[X=k]}{\bar{A}}\right)$$

soit finalement :

$$E(X) = p(A)E\left(\frac{X}{A}\right) + p(\bar{A})E\left(\frac{X}{\bar{A}}\right)$$

**c)** On montrerait, par un raisonnement analogue, que, si  $X$  admet un moment d'ordre  $k$ , alors  $E\left(\frac{X^k}{A}\right)$  et  $E\left(\frac{X^k}{\bar{A}}\right)$  existent, puis que :

$$E(X^k) = p(A)E\left(\frac{X^k}{A}\right) + p(\bar{A})E\left(\frac{X^k}{\bar{A}}\right)$$



- 2) a) Soit  $i \in X(\Omega)$ . Comme  $p(X=i) \neq 0$ , en substituant  $[X=i]$  à  $A$  et  $Y$  à  $X$  dans le raisonnement de la question 1.a, on peut conclure :

$$\text{Pour tout } i \in X(\Omega), E\left(\frac{Y}{[X=i]}\right) \text{ existe}$$

- b) Comme  $Y$  admet une espérance et comme  $Y$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on a :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(Y=k) \quad \text{soit, d'après la formule des probabilités totales, la famille } (X=i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ étant un système complet d'événements tous de probabilités non nulles :}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( k \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i) p\left(\frac{[Y=k]}{[X=i]}\right) \right) \text{ soit, l'inversion des sommes infinies étant autorisées car } Y \text{ admet une espérance :}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left( p(X=i) \sum_{k=0}^{+\infty} kp\left(\frac{[Y=k]}{[X=i]}\right) \right) \text{ d'où, comme, pour tout } i \in X(\Omega), E\left(\frac{Y}{[X=i]}\right) \text{ existe:}$$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i) E\left(\frac{Y}{[X=i]}\right)$$

- c) On montrerait, par un raisonnement analogue, que, si  $Y$  admet un moment d'ordre  $k$ , alors pour tout  $i \in X(\Omega)$ ,  $E\left(\frac{Y^k}{[X=i]}\right)$  existe, puis que :

$$E(Y^k) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i) E\left(\frac{Y^k}{[X=i]}\right)$$

**Exercice 4**

1) Comme pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto t^x$  est définie en tout point de  $\mathbb{N}$ , donc en tout point de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $E(t^x)$  existe, on a (théorème de transfert):

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = E(t^x) \quad \text{donc :}$$

$$= \sum_{k=0}^n p(X = k) t^k .$$

Or, pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , on a également :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = \sum_{k=0}^n p(X = k) t^k , \text{ donc, en reconnaissant } E(t^x), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, E(t^x) \text{ existe et :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = E(t^x) .$$

Montrons, par montée fine, que si les variables aléatoires  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  sont mutuellement indépendantes, alors :

$$\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) .$$

- Si les variables aléatoires  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  sont mutuellement indépendantes, alors  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t^{x_1}$  et  $t^{x_2}$  sont indépendants. On peut alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(t^{x_1 + x_2}) = E(t^{x_1}) E(t^{x_2}), \text{ soit: } \forall t \in \mathbb{R}, E(t^{x_1 + x_2}) = E(t^{x_1}) E(t^{x_2}) .$$

En utilisant la remarque précédente, on en déduit alors :  $\forall t \in \mathbb{R}, G_{x_1 + x_2}(t) = G_{x_1}(t) G_{x_2}(t)$ . La propriété est donc bien vérifiée au rang  $k=2$ .

- Soit  $k \in \llbracket 2, p - 1 \rrbracket$  (si  $p \geq 3$ ), supposons que :  $\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t)$ . Les variables aléatoires  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  étant mutuellement indépendantes, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les variables aléatoires  $t^{\sum_{i=1}^k X_i}$  et  $t^{X_{k+1}}$  sont également indépendantes, d'où :

aléatoires  $t^{\sum_{i=1}^k X_i}$  et  $t^{X_{k+1}}$  sont également indépendantes, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, E \left( t^{\sum_{i=1}^k X_i} t^{X_{k+1}} \right) = E \left( t^{\sum_{i=1}^k X_i} \right) E(t^{X_{k+1}}) \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, E \left( t^{\sum_{i=1}^{k+1} X_i} \right) = E \left( t^{\sum_{i=1}^k X_i} \right) E(t^{X_{k+1}}) \text{ ce qui s'écrit encore, d'après la remarque précédente :}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) G_{X_{k+1}}(t)$  et donc, d'après l'hypothèse :

$$= \left( \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) \right) G_{X_{k+1}}(t) \quad \text{i.e. :}$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}(t).$$

- Ainsi, on a bien :  $\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t)$ .

On peut alors conclure, pour  $k=p$  :

Si  $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$  est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , alors :  $\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t)$

- 2) Comme pour tout  $t \in [-1, 1]$ , l'application  $x \mapsto t^x$  est définie en tout point de  $\mathbb{N}$ , pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}, E(t^x)$  existe, on a (théorème de transfert) :  $\forall t \in [-1, 1], E(t^x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k)t^k$ .

Or, pour toute variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ ,  $G_x$  est au moins définie sur  $[-1, 1]$  et on peut écrire :  $\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k)t^k$ . Ainsi, la série de terme général  $p(X=k)t^k$  converge absolument donc  $E(t^x)$  existe et l'on a :

$$\forall t \in [-1, 1], G_x(t) = E(t^x).$$

Montrons alors par récurrence, que si les variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  sont mutuellement indépendantes, alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$ .

- Au rang  $n=1$ , on a clairement :  $\forall t \in [-1, 1], G_{X_1}(t) = G_{X_1}(t)$ . La propriété est donc bien vérifiée au rang 1.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons  $\forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$ .

Les variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  étant mutuellement indépendantes, il est clair que pour tout

$t \in [-1, 1]$ , les variables aléatoires  $t^{\sum_{i=1}^n X_i}$  et  $t^{X_{n+1}}$  sont indépendantes, d'où :

$$\forall t \in [-1, 1], E \left( t^{\sum_{i=1}^n X_i} t^{X_{n+1}} \right) = E \left( t^{\sum_{i=1}^n X_i} \right) E(t^{X_{n+1}}) \text{ i.e. :}$$

$$\forall t \in [-1, 1], E \left( t^{\sum_{i=1}^{n+1} X_i} \right) = E \left( t^{\sum_{i=1}^n X_i} \right) E(t^{X_{n+1}})$$

ce qui s'écrit encore, d'après la remarque

précédente :

$$\forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) G_{X_{n+1}}(t)$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$= \left( \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) \right) G_{X_{n+1}}(t) \text{ i.e. :}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} G_{X_i}(t).$$

- Ainsi, on a bien :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$ , d'où la conclusion :

Si  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$ .