Limites et comparaison

Méthode

Attention : ne pas parler de la limite d'une fonction tant qu'on n'en a pas prouvé l'existence. Une fois l'existence prouvée, on notera, à sa guise : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x_0} f$.

I. Montrer que deux fonctions sont équivalentes en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

1) En cherchant la limite du quotient

Se souvenir que, s'il existe un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ sur lequel la fonction g ne s'annule pas (ou, si $x_0 = \infty$, si g ne s'annule pas à partir d'un « certain rang »), alors les fonctions f et g sont équivalentes en x_0 si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0.

2) A l'aide de la définition

Si la première méthode n'est pas applicable ou si elle n'aboutit pas, on peut généralement utiliser la définition de l'équivalence.

II. Montrer qu'une fonction admet une limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

1) En décomposant la fonction comme somme et/ou produit de fonctions admettant une limite

2) En prouvant que la fonction est équivalente à une fonction admettant une limite

3) A l'aide du théorème de la limite monotone

4) A l'aide de la continuité (pour l'existence d'une limite en un point)

III. Déterminer la limite d'une fonction en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

1) Calcul direct

Dans certains cas, il est possible de déterminer la limite d'une fonction en déterminant la limite de ses composantes. Deux cas principaux se présentent :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

■ ***Limite de la somme de deux fonctions dont on connaît les limites respectives :***

	$-\infty$	$l\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé
$l'\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$l+l'$	$+\infty$
$+\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

■ ***Limite du produit de deux fonctions dont on connaît les limites respectives :***

	$-\infty$	$l<0$	0	$l>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indéterminé	$-\infty$	$-\infty$
$l'<0$	$+\infty$	ll'	0	ll'	$-\infty$
0	Indéterminé	0	0	0	Indéterminé
$l'>0$	$-\infty$	ll'	0	ll'	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

■ Si la fonction f est la composée par une fonction g d'une fonction h. Se souvenir que, si $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \beta$ (x_0 et β étant éléments de $\overline{\mathbb{R}}$) et si $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \alpha$ ($\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$), alors $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ h)(x) = \alpha$.
En particulier, si h est continue en x_0 (si $x_0\in\mathbb{R}$), on a : $\beta=h(x_0)$ et, si g est continue en β (si $\beta\in\mathbb{R}$), alors $\alpha=g(\beta)$.

■ Pour déterminer la limite d'une fonction de la forme $x \mapsto (f(x))^{g(x)}$ (où f est une fonction strictement positive sur un voisinage du point où l'on cherche la limite), on peut rechercher la limite de la fonction $x \mapsto g(x)\ln(f(x))$ puis utiliser le point précédent avec la fonction exponentielle.

■ Pour déterminer la limite d'une fonction dont la forme est un produit de fonctions strictement positives sur un voisinage du point où l'on cherche la limite, on peut se ramener à une somme en utilisant la fonction ln.

2) <u>Par comparaison avec une autre fonction</u>

Pour déterminer la limite d'une fonction, on peut utiliser :

- les équivalents (deux fonctions équivalentes en un point et admettant une limite tendent vers la même limite) (voir I),
- Les négligeabilités usuelles (croissances comparées).

3) En utilisant le théorème de l'encadrement

Se souvenir que, si f, g et h sont telles que : $\exists e \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in]a\text{-}e, a+e[,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, et si f et h tendent vers α en a, alors $\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ (théorème de l'encadrement) (théorème analogue si $a = \pm\infty$).

4) Si l'on veut montrer que la fonction f tend vers l

- Montrer que la fonction $x \mapsto f(x) - \ell$ tend vers 0.
- Utiliser la définition de la limite (rare).
- Raisonner par l'absurde.

5) Si l'on veut montrer que la fonction admet une limite infinie

- utiliser la définition de la limite,
- Montrer que la fonction est minorée par une fonction tendant vers $+\infty$ en x_0 ou majorée par une fonction tendant vers $-\infty$ en x_0 ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$).