

Enoncés

EXERCICE 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1.1 $\int_0^{+\infty} f(t) dt$, où f est une fonction continue sur \mathbb{R}^+ et de signe constant sur un intervalle $[a, +\infty[$ de \mathbb{R}^+ , tendant vers α ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}^*}$ où $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$) en $+\infty$.

1.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$,

1.3 $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

1.4 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$,

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$.

EXERCICE 2

Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On rappelle que $I_0 = \sqrt{2p}$ et $I_1 = 0$ (cf chapitre Variables à densité).

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.
- 2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n .
- 3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n en fonction de n .

EXERCICE 3

Soit $c \in [1, +\infty[$. On considère une fonction g positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur $[c, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente. On considère également une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \sim g(n).$$

1) Soient q et N deux entiers naturels tels que : $c \leq q < N$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in [q, +\infty[, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n).$$

b) En déduire que :

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q)$$

2) Soit ε un réel de $]0, 1[$.

a) Montrer que :

$$\exists q \in [c, +\infty[, \forall n \in [q, +\infty[, (1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$$

b) En déduire que :

$$\forall N \in [q+1, +\infty[, (1-\varepsilon) \leq \int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon) \int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon) \int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) +$$

3) Montrer alors que :

$$w_n \sim \int_1^n g(t) dt.$$

4) Prouver enfin que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Corrections

EXERCICE 1

1) Trois cas se présentent :

- si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, par définition de la limite, on peut donc écrire :
 $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, f(t) \geq \frac{\alpha}{2} \geq 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} dt$ diverge, on peut donc écrire,
 d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives,
 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge,

- Si $\alpha = +\infty$. Dans ce cas, on peut écrire, par définition de la limite :
 $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, f(t) \geq 1$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1 dt$ diverge, on peut donc écrire,
 d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que
 l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty\}$. En raisonnant comme précédemment avec la fonction $-f$,
 on montrerait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

On peut finalement conclure :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge

2) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[1, +\infty[$. De plus, on a :

$\forall t \in [e, +\infty[, \ln t \geq 1$ soit, en divisant par $t > 0$:

$$\forall t \in [e, +\infty[, \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t}.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant continues et positives sur $[1, +\infty[$,
 comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des
 intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ diverge

3) Deux cas se présentent :

- Si $\alpha \leq 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus, on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[, t^\alpha \leq 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[, -t^\alpha \geq -1 \quad \text{et en composant par la fonction exponentielle (croissante) :}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[, e^{-t^\alpha} \geq e^{-1}.$$

Les fonctions $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ et $t \mapsto e^{-1}$ étant continues et positives sur \mathbb{R}^+ , comme $\int_1^{+\infty} e^{-1} dt$ diverge (car l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt$ diverge), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ diverge, et donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ diverge.

- Si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . De plus, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^\alpha} = 0$ (croissances comparées), d'où :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists t > A, t^2 e^{-t^\alpha} \leq 1 \text{ soit, en divisant par } t^2 > 0 (t \in \mathbb{R}_+^*) :$$

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists t > A, e^{-t^\alpha} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur \mathbb{R}_+^* , comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ converge.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

4) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0, 1[$.

- De plus, au voisinage de 0, on a : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant continues et positives sur $]0, 1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

- De même, au voisinage de 1, on a : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ étant continues et positives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge (en posant avec soin $u = 1-t$, on se ramène à une intégrale de Riemann convergente), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.
- Comme les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ convergent, on peut désormais conclure :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \text{ converge}$$

5) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ est continue sur $] -1,0[$ et sur $]0,1[$. De plus, au voisinage de 1, on a : $\frac{1}{\ln|t|} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$. La fonction $t \mapsto 1-t$ étant de classe C^1 sur $]0,1[$, donc, pour tout $x \in]0,1[$, de classe C^1 sur $]0,x[$, en effectuant le changement de variable $u = 1-t$, $du = -dt$, on peut alors écrire : $\int_0^x \frac{dt}{t-1} = - \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$.

Or, comme $\int_0^1 \frac{du}{u}$ diverge (intégrale de Riemann), la fonction $x \mapsto \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$ n'admet également pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc l'intégrale $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$ diverge.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ étant continues et négatives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ diverge, les critères de comparaison des intégrales de fonctions de signe constant nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$ diverge, et donc :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|} \text{ diverge}$$

EXERCICE 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur \mathbb{R} comme produit et composée de fonctions continues sur \mathbb{R} . De plus, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ (croissance comparées). D'après la définition de la limite, on peut donc écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists t^3 \in A, t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists t^3 \in A, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{t^2}$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann), et comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \geq 0$, on peut donc écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge. De même, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = 0$, on peut écrire que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \left| t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt$ converge, donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est absolument convergente. On peut finalement conclure :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+1} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant de classe C^1 sur $[0, x] (x \in \mathbb{R}^+)$, en effectuant une intégration par parties (on intègre $t \mapsto t e^{-\frac{t^2}{2}}$ et on dérive $t \mapsto t^{n+1}$), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \left[-t^{n+1} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = -x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient :
 $\int_0^{+\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. De même, on a : $\int_{-\infty}^0 t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (n+1) \int_{-\infty}^0 t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On peut finalement conclure, d'après la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3) Montrons alors par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$ et $I_{2p+1} = 2^p p! I_1$.

- Au rang $p = 0$. On a bien : $I_0 = I_0$ et $I_1 = I_1$. La propriété est donc bien vérifiée au rang $p = 0$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que : $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$ et $I_{2p+1} = 2^p p! I_1$. D'après le résultat de la question précédente, on

peut alors écrire : $I_{2p+2} = (2p+1) \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$ et $I_{2p+3} = (2p+2) 2^p p! I_1$ d'où : $I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{p+1} (p+1)!} I_0$ et $I_{2p+3} = 2^{p+1} (p+1)! I_1$. Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $p+1$.

- Ainsi, on a bien : $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$ et $I_{2p+1} = 2^p p! I_1$.

- De plus, on a :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \quad \text{d'où, comme } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ est une densité de probabilité :}$$

De même, comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de la loi normale centrée réduite, on peut écrire, en considérant une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite : $I_1 = E(X)$, donc : $I_1 = 0$.

On peut finalement conclure :

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sqrt{2\pi} \\ I_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 3

- 1) a) Comme q est supérieur ou égal à c , la fonction g est décroissante sur $[q, +\infty[$, donc, pour tout $n \in [q, +\infty[$, sur $[n, n+1]$, et on a :

$$\forall n \in [q, +\infty[, \forall t \in [n, n+1], g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$$

D'où, en intégrant ces inégalités sur $[n, n+1]$, les fonctions en présence étant continues, pour tout $n \in [q, +\infty[$, sur $[n, n+1]$ (car : $\forall n \in [q, +\infty[, [n, n+1] \subset [1, +\infty[$) :

$$\forall n \in [q, +\infty[, \int_n^{n+1} g(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq \int_n^{n+1} g(n) dt .$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in [q, +\infty[, \int_n^{n+1} g(n+1) dt &= (n+1 - n)g(n+1) && \text{donc :} \\ &= g(n+1) && \text{et :} \end{aligned}$$

$$\forall n \in [q, +\infty[, \int_n^{n+1} g(n) dt = g(n) .$$

On peut désormais conclure :

$$\forall n \in [q, +\infty[, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n)$$

- b) En sommant alors l'inégalité de droite de $n = q$ à $n = N - 1$ ($N > q$), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t) dt &\leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) && \text{soit, d'après la relation de Chasles :} \\ \int_q^N g(t) dt &\leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \end{aligned}$$

De même, en sommant l'inégalité de gauche de $n = q$ à $n = N - 1$ ($N > q$), on peut écrire :

$\sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) \leq \sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t) dt$ d'où, d'après la relation de Chasles, et en effectuant le changement d'indice $n' = n + 1$ dans la somme de gauche :

$$\sum_{n=q+1}^N g(n) \leq \int_q^N g(t) dt \quad \text{soit encore :}$$

$$\sum_{n=q}^{N-1} g(n) - g(q) + g(N) \leq \int_q^N g(t) dt \quad \text{i.e. :}$$

$$\sum_{n=q}^N g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q) - g(N) \quad \text{et donc, comme } g(N) \geq 0 \text{ (car } N > q \geq c \geq 1) :$$

$$\sum_{n=q}^N g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q)$$

En considérant les relations \leq et \geq , on peut finalement conclure :

$$\int_q^N g(t) dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q)$$

2) a) Comme par hypothèse, on a : $w_{n+1} - w_n \sim g(n)$, on peut écrire, par définition de l'équivalent, qu'il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendant vers 1 quand n tend vers $+\infty$ telle que : $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, w_{n+1} - w_n = h_n g(n)$. De plus, comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$, on peut écrire d'après la définition de la limite d'une suite :

$$\forall \epsilon \in]0, 1[\exists c \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 1 - \epsilon \leq h_n \leq 1 + \epsilon \quad \text{et donc en multipliant par } g(n) \geq 0 :$$

$$\forall \epsilon \in]0, 1[\exists c \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \epsilon)g(n) \leq h_n g(n) \leq (1 + \epsilon)g(n) \quad \text{soit, comme : } h_n g(n) = w_{n+1} - w_n$$

$$\forall \epsilon \in]0, 1[\exists c \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \epsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \epsilon)g(n)$$

On peut donc conclure :

Il existe un entier naturel q supérieur ou égal à c tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{N}, \forall n \geq q, (1 - \epsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \epsilon)g(n)$$

b) En sommant les inégalités précédentes de $n=q$ à $n=N-1$ ($N>q$), on a alors :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \leq \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} (w_{n+1} - w_n) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \quad \text{soit, les termes s'éliminant deux à deux dans la troisième somme :}$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \leq w_N - w_q \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \quad \text{i.e. :}$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) + w_q \quad \text{||}$$

De plus, en multipliant l'inégalité de gauche du 1b par $1 - \varepsilon$ ($1 - \varepsilon \geq 0$ car $\varepsilon < 1$), on peut écrire :

$$(1 - \varepsilon) \int_q^N g(t) dt \leq (1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \quad \text{d'où, d'après la relation || :}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_q^N g(t) dt + w_q \leq w_N \quad \text{soit, comme : } \int_q^N g(t) dt = \int_1^N g(t) dt - \int_1^q g(t) dt \text{ (relation de Chasles, } g \text{ étant continue sur } [1, N]) \text{ :}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt + w_q \leq w_N \quad .$$

De même, en multipliant l'inégalité de droite du 1b par $1 + \varepsilon$ ($1 + \varepsilon \geq 0$ car $\varepsilon > 0$), on peut écrire :

$$(1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \leq (1 + \varepsilon) \int_q^N g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) \text{ d'où, d'après la relation || :}$$

$$w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_q^N g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) + w_q$$

Or on a, d'après la relation de Chasles, g étant continue sur $[1, n]$:

$$\int_q^N g(t) dt = \int_1^N g(t) dt - \int_1^q g(t) dt \text{ d'où comme :}$$

$\int_1^q g(t) dt \geq 0$ (car g est positive sur $[1, +\infty[$) : $\int_q^N g(t) dt \leq \int_1^N g(t) dt$. Comme : $1 + \varepsilon \geq 0$, on a donc:

$$w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N g(t) dt + (1 + \varepsilon) g(q) + w_q \quad \text{⑤.}$$

On peut alors conclure, en considérant les relations ④ et ⑤ :

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N g(t) dt + (1 + \varepsilon) g(q) + w_q$$

3) Montrons tout d'abord que : $\int_1^N g(t) dt > 0$. Supposons alors que : $\int_1^N g(t) dt \leq 0$. Comme g est positive sur $[1, N]$, on a également : $\int_1^N g(t) dt \geq 0$, donc : $\int_1^N g(t) dt = 0$, d'où g étant de signe constant sur $[1, N]$:

$\forall x \in]1, N[$, $g(x) = 0$ soit, comme g est décroissante et positive sur $[c, +\infty[$ et comme $N \geq q + 1 > c$:

$\forall x \in]1, +\infty[$, $g(x) = 0$ d'où :

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt = 0.$$

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur g . On peut donc conclure : $\int_1^N g(t) dt > 0$.

En divisant alors par $\int_1^N g(t) dt > 0$ dans la double inégalité du 2b, on peut écrire :

$$(1 - \varepsilon) - \frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^N g(t) dt} \leq \frac{w_N}{\int_1^N g(t) dt} \leq (1 + \varepsilon) + \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^N g(t) dt} \text{ ⑥.}$$

Montrons alors que la suite $\left(\int_1^n g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Par définition, on peut écrire que la fonction $\Psi : x \mapsto \int_1^x g(t) dt$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, et on a : $\forall x \in [1, +\infty[$, $\Psi'(x) = g(x)$. Ainsi, g étant positive sur $[1, +\infty[$, Ψ est croissante sur $[1, +\infty[$.

D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

De même, la suite $\left(\int_1^n g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et admet donc une limite, finie ou infinie. Supposons alors qu'elle converge vers une limite ℓ . Comme elle est croissante, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_1^n g(t) dt \leq \ell$.

De plus, comme : $\forall x \in [1, +\infty[$, $x \leq E(x) + 1$, on a, Ψ étant croissante sur $[1, +\infty[$:

$$\forall x \in [1, +\infty[, \psi(x) \leq \psi(E(x) + 1) \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x g(t) dt \leq \int_1^{E(x)+1} g(t) dt \quad \text{d'où, comme : } \forall x \in [1, +\infty[, (E(x) + 1) \in \mathbb{N}^* :$$

$$\leq \ell$$

Ainsi, en faisant tendre x vers $+\infty$, d'après le théorème de prolongement des inégalités, ψ admet une limite finie en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur g .

Ainsi, la suite $\left(\int_1^n g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite infinie. Comme elle est croissante, on peut donc écrire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n g(t) dt = +\infty$.

Comme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n g(t) dt = +\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^n g(t) dt} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^n g(t) dt} = 0.$$

Par définition de la limite d'une suite, on peut alors écrire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_1, +\infty[, -\alpha \leq -\frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^n g(t) dt} \leq \alpha \quad \text{et :}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_2, +\infty[, -\alpha \leq -\frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^n g(t) dt} \leq \alpha.$$

Ainsi, comme $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_1, +\infty[, -\varepsilon \leq -\frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^n g(t) dt} \quad \text{et :}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_2, +\infty[, \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^n g(t) dt} \leq \varepsilon.$$

En considérant la relation $\textcircled{6}$, on peut alors écrire, en posant $n_0 = \max(q + 1, n_1, n_2)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_0, +\infty[, 1 - 2\varepsilon \leq \frac{w_n}{\int_1^n g(t) dt} \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Cette double inégalité pour un ε quelconque dans $]0, 1[$, on peut donc écrire :

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, 1 - 2\varepsilon \leq \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1 + 2\varepsilon \text{ soit, en posant } \varepsilon' = 2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in]0, 2[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, 1 - \varepsilon \leq \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{d'où ce résultat s'étendant aux cas } \varepsilon \geq 2 :$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, \left| \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Par définition de la limite d'une suite, on a donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} = 1$. On peut finalement conclure :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)dt$$

- 4) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall x \in [1, +\infty[, g(x) = \frac{1}{x}$. La fonction g est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est divergente (intégrale de Riemann).

Soit alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme : $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on peut donc écrire :

$w_{n+1} - w_n \sim g(n)$ et donc, d'après le résultat de la question précédente (avec $c=1$)

$$w_n \sim \int_1^n g(t)dt.$$

Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n g(t) dt = \int_1^n \frac{dt}{t}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} &= \ln n - \ln 1 \\ &= \ln n. \end{aligned}$$

et donc, comme $\ln 1 = 0$:

On peut donc conclure :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$