

## Enoncés

## EXERCICE 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1.1  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ , où  $f$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}^+$  et de signe constant sur un intervalle  $[a, +\infty[$  de  $\mathbb{R}^+$ , tendant vers  $\alpha$  ( $\alpha \in \overline{\mathbb{R}^*}$  où  $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty, +\infty\}$ ) en  $+\infty$ .

1.2  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$ ,

1.3  $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ),

1.4  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ ,

1.5  $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$ .

## EXERCICE 2

Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

On rappelle que  $I_0 = \sqrt{2p}$  et  $I_1 = 0$  (cf chapitre Variables à densité).

- 1) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  converge.
- 2) Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $I_{n+2}$  en fonction de  $I_n$ .
- 3) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $I_n$  en fonction de  $n$ .

## EXERCICE 3

Soit  $c \in [1, +\infty[$ . On considère une fonction  $g$  positive, continue sur  $[1, +\infty[$ , décroissante sur  $[c, +\infty[$  et telle que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} g(t)dt$  soit divergente. On considère également une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que :

$$w_{n+1} - w_n \sim g(n).$$

1) Soient  $q$  et  $N$  deux entiers naturels tels que :  $c \leq q < N$ .

a) Montrer que :

$$\forall n \in [q, +\infty[, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n).$$

b) En déduire que :

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q)$$

2) Soit  $\varepsilon$  un réel de  $]0, 1[$ .

a) Montrer que :

$$\exists q \in [c, +\infty[, \forall n \in [q, +\infty[, (1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$$

b) En déduire que :

$$\forall N \in [q+1, +\infty[, (1-\varepsilon) \leq \int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon) \int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon) \int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) +$$

3) Montrer alors que :

$$w_n \sim \int_1^n g(t) dt.$$

4) Prouver enfin que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

## Corrections

## EXERCICE 1

1) Trois cas se présentent :

- si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Dans ce cas, par définition de la limite, on peut donc écrire :  
 $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, f(t) \geq \frac{\alpha}{2} \geq 0$ . Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} dt$  diverge, on peut donc écrire,  
d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives,  
que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge,

- Si  $\alpha = +\infty$ . Dans ce cas, on peut écrire, par définition de la limite :  
 $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, f(t) \geq 1$ . Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} 1 dt$  diverge, on peut donc écrire,  
d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que  
l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

- Si  $\alpha \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty\}$ . En raisonnant comme précédemment avec la fonction  $-f$ ,  
on montrerait que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

On peut finalement conclure :

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge

2) La fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$  est continue sur  $[1, +\infty[$  en tant que quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur  $[1, +\infty[$ . De plus, on a :

$\forall t \in [e, +\infty[, \ln t \geq 1$  soit, en divisant par  $t > 0$  :

$$\forall t \in [e, +\infty[, \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t}.$$

Les fonctions  $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t}$  étant continues et positives sur  $[1, +\infty[$ ,  
comme  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des  
intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$  diverge

3) Deux cas se présentent :

- Si  $\alpha \leq 0$ , la fonction  $t \mapsto e^{-t^\alpha}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, on a :

$$\forall t \in [1, +\infty[ , t^\alpha \leq 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[ , -t^\alpha \geq -1 \quad \text{et en composant par la fonction exponentielle (croissante) :}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[ , e^{-t^\alpha} \geq e^{-1}.$$

Les fonctions  $t \mapsto e^{-t^\alpha}$  et  $t \mapsto e^{-1}$  étant continues et positives sur  $\mathbb{R}^+$ , comme  $\int_1^{+\infty} e^{-1} dt$  diverge (car l'intégrale  $\int_1^{+\infty} dt$  diverge), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$  diverge, et donc que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$  diverge.

- Si  $\alpha > 0$ , la fonction  $t \mapsto e^{-t^\alpha}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ . De plus, on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^\alpha} = 0$  (croissances comparées), d'où :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists t > A, t^2 e^{-t^\alpha} \leq 1 \text{ soit, en divisant par } t^2 > 0 (t \in \mathbb{R}_+^*) :$$

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists t > A, e^{-t^\alpha} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions  $t \mapsto e^{-t^\alpha}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  étant continues et positives sur  $\mathbb{R}_+^*$ , comme  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$  converge.

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$  converge si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

4) La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$  est continue sur  $]0, 1[$ .

- De plus, au voisinage de 0, on a :  $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ . Les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$  et  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$  étant continues et positives sur  $]0, 1[$ , comme  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$  converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$  converge.

- De même, au voisinage de 1, on a :  $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ . Les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$  et  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$  étant continues et positives sur  $]0,1[$ , comme  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$  converge (en posant avec soin  $u = 1-t$ , on se ramène à une intégrale de Riemann convergente), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$  converge.
- Comme les intégrales  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$  et  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$  convergent, on peut désormais conclure :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \text{ converge}$$

5) La fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$  est continue sur  $] -1,0[$  et sur  $]0,1[$ . De plus, au voisinage de 1, on a :  $\frac{1}{\ln|t|} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$ . La fonction  $t \mapsto 1-t$  étant de classe  $C^1$  sur  $]0,1[$ , donc, pour tout  $x \in ]0,1[$ , de classe  $C^1$  sur  $]0,x[$ , en effectuant le changement de variable  $u = 1-t$ ,  $du = -dt$ , on peut alors écrire :  $\int_0^x \frac{dt}{t-1} = - \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$ .

Or, comme  $\int_0^1 \frac{du}{u}$  diverge (intégrale de Riemann), la fonction  $x \mapsto \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$  n'admet pas de limite finie lorsque  $x$  tend vers 1, donc la fonction  $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$  n'admet également pas de limite finie lorsque  $x$  tend vers 1, donc l'intégrale  $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$  diverge.

Les fonctions  $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$  et  $t \mapsto \frac{1}{t-1}$  étant continues et négatives sur  $]0,1[$ , comme  $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$  diverge, les critères de comparaison des intégrales de fonctions de signe constant nous permettent d'écrire que l'intégrale  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$  diverge, et donc :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|} \text{ diverge}$$

## EXERCICE 2

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La fonction  $t \mapsto t^n e^{-\frac{t^2}{2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme produit et composée de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ . De plus, on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$  (croissance comparées). D'après la définition de la limite, on peut donc écrire :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists t^3 \in A, t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 1 \quad \text{d'où :}$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists t^3 \in A, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{t^2}$$

Comme l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge (intégrale de Riemann), et comme :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \geq 0$ , on peut donc écrire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  converge. De même, comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = 0$ , on peut écrire que l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 \left| t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt$  converge, donc que l'intégrale  $\int_{-\infty}^0 t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  est absolument convergente. On peut finalement conclure :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$  converge

2) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+1} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Les fonctions  $t \mapsto t^{n+1}$  et  $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$  étant de classe  $C^1$  sur  $[0, x] (x \in \mathbb{R}^+)$ , en effectuant une intégration par parties (on intègre  $t \mapsto t e^{-\frac{t^2}{2}}$  et on dérive  $t \mapsto t^{n+1}$ ), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \left[ -t^{n+1} e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{d'où :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = -x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ , en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on obtient :  
 $\int_0^{+\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . De même, on a :  $\int_{-\infty}^0 t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (n+1) \int_{-\infty}^0 t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ . On peut finalement conclure, d'après la relation de Chasles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3) Montrons alors par récurrence que :  $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$  et  $I_{2p+1} = 2^p p! I_1$ .

■ Au rang  $p = 0$ . On a bien :  $I_0 = I_0$  et  $I_1 = I_1$ . La propriété est donc bien vérifiée au rang  $p = 0$ .

■ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Supposons que :  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$  et  $I_{2p+1} = 2^p p! I_1$ . D'après le résultat de la question précédente, on

peut alors écrire :  $I_{2p+2} = (2p+1) \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$  et  $I_{2p+3} = (2p+2) 2^p p! I_1$  d'où :  $I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{p+1} (p+1)!} I_0$  et  $I_{2p+3} = 2^{p+1} (p+1)! I_1$ . Ainsi, la propriété est vérifiée au rang  $p+1$ .

■ Ainsi, on a bien :  $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!} I_0$  et  $I_{2p+1} = 2^p p! I_1$ .

■ De plus, on a :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi} \quad \text{d'où, comme } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ est une densité de probabilité :}$$

De même, comme  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  est une densité de la loi normale centrée réduite, on peut écrire, en considérant une variable aléatoire  $X$  suivant une loi normale centrée réduite :  $I_1 = E(X)$ , donc :  $I_1 = 0$ .

On peut finalement conclure :

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sqrt{2\pi} \\ I_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

### EXERCICE 3

- 1) a) Comme  $q$  est supérieur ou égal à  $c$ , la fonction  $g$  est décroissante sur  $[q, +\infty[$ , donc, pour tout  $n \in [q, +\infty[$ , sur  $[n, n+1]$ , et on a :

$$\forall n \in [q, +\infty[, \forall t \in [n, n+1], g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$$

D'où, en intégrant ces inégalités sur  $[n, n+1]$ , les fonctions en présence étant continues, pour tout  $n \in [q, +\infty[$ , sur  $[n, n+1]$  (car :  $\forall n \in [q, +\infty[, [n, n+1] \cap [1, +\infty[ \neq \emptyset$ ) :

$$\forall n \in [q, +\infty[, \int_n^{n+1} g(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq \int_n^{n+1} g(n) dt .$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in [q, +\infty[, \int_n^{n+1} g(n+1) dt &= (n+1 - n)g(n+1) && \text{donc :} \\ &= g(n+1) && \text{et :} \end{aligned}$$

$$\forall n \in [q, +\infty[, \int_n^{n+1} g(n) dt = g(n) .$$

On peut désormais conclure :

$$\forall n \in [q, +\infty[, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t) dt \leq g(n)$$

- b) En sommant alors l'inégalité de droite de  $n = q$  à  $n = N - 1$  ( $N > q$ ), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t) dt &\leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) && \text{soit, d'après la relation de Chasles :} \\ \int_q^N g(t) dt &\leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \end{aligned}$$



De même, en sommant l'inégalité de gauche de  $n = q$  à  $n = N - 1$  ( $N > q$ ), on peut écrire :

$\sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) \leq \sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t) dt$  d'où, d'après la relation de Chasles, et en effectuant le changement d'indice  $n' = n + 1$  dans la somme de gauche :

$$\sum_{n=q+1}^N g(n) \leq \int_q^N g(t) dt \quad \text{soit encore :}$$

$$\sum_{n=q}^{N-1} g(n) - g(q) + g(N) \leq \int_q^N g(t) dt \quad \text{i.e. :}$$

$$\sum_{n=q}^N g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q) - g(N) \quad \text{et donc, comme } g(N) \geq 0 \text{ (car } N > q \geq c \geq 1) :$$

$$\sum_{n=q}^N g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q)$$

En considérant les relations  $\leq$  et  $\geq$ , on peut finalement conclure :

$$\int_q^N g(t) dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t) dt + g(q)$$

**2) a)** Comme par hypothèse, on a :  $w_{n+1} - w_n \sim g(n)$ , on peut écrire, par définition de l'équivalent, qu'il existe une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  tendant vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  telle que :  $\forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, w_{n+1} - w_n = h_n g(n)$ . De plus, comme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$ , on peut écrire d'après la définition de la limite d'une suite :

$$\forall \epsilon \in ]0, 1[ \exists c \in \mathbb{N} \exists [c, +\infty[ \exists [n_0, +\infty[, \forall n \geq n_0, 1 - \epsilon \leq h_n \leq 1 + \epsilon \quad \text{et donc en multipliant par } g(n) \geq 0 :$$

$$\forall \epsilon \in ]0, 1[ \exists c \in \mathbb{N} \exists [c, +\infty[ \exists [n_0, +\infty[, \forall n \geq n_0, (1 - \epsilon)g(n) \leq h_n g(n) \leq (1 + \epsilon)g(n) \quad \text{soit, comme : } \forall n \geq n_0, h_n g(n) = w_{n+1} - w_n$$

$$\forall \epsilon \in ]0, 1[ \exists c \in \mathbb{N} \exists [c, +\infty[ \exists [n_0, +\infty[, \forall n \geq n_0, (1 - \epsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \epsilon)g(n).$$

On peut donc conclure :

Il existe un entier naturel  $q$  supérieur ou égal à  $c$  tel que :

$$\forall n \in [q, +\infty[, (1 - \epsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \epsilon)g(n)$$

b) En sommant les inégalités précédentes de  $n=q$  à  $n=N-1$  ( $N>q$ ), on a alors :

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \leq \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} (w_{n+1} - w_n) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \quad \text{soit, les termes s'éliminant deux à deux dans la troisième somme :}$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \leq w_N - w_q \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \quad \text{i.e. :}$$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) + w_q \quad \text{||}$$

De plus, en multipliant l'inégalité de gauche du 1b par  $1 - \varepsilon$  ( $1 - \varepsilon \geq 0$  car  $\varepsilon < 1$ ), on peut écrire :

$$(1 - \varepsilon) \int_q^N \dot{a} g(t) dt \leq (1 - \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \quad \text{d'où, d'après la relation || :}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_q^N \dot{a} g(t) dt + w_q \leq w_N \quad \text{soit, comme : } \int_q^N \dot{a} g(t) dt = \int_1^N \dot{a} g(t) dt - \int_1^q \dot{a} g(t) dt \text{ (relation de Chasles, } g \text{ étant continue sur } [1, N]) \text{ :}$$

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N \dot{a} g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q \dot{a} g(t) dt + w_q \leq w_N \quad .$$

De même, en multipliant l'inégalité de droite du 1b par  $1 + \varepsilon$  ( $1 + \varepsilon \geq 0$  car  $\varepsilon > 0$ ), on peut écrire :

$$(1 + \varepsilon) \sum_{n=q}^{N-1} \dot{a} g(n) \leq (1 + \varepsilon) \int_q^N \dot{a} g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) \quad \text{d'où, d'après la relation || :}$$

$$w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_q^N \dot{a} g(t) dt + (1 + \varepsilon)g(q) + w_q$$

Or on a, d'après la relation de Chasles,  $g$  étant continue sur  $[1, n]$  :

$$\int_q^N \dot{a} g(t) dt = \int_1^N \dot{a} g(t) dt - \int_1^q \dot{a} g(t) dt \quad \text{d'où comme :}$$

$\int_1^q \dot{a} g(t) dt \geq 0$  (car  $g$  est positive sur  $[1, +\infty[$ ) :  $\int_q^N \dot{a} g(t) dt \leq \int_1^N \dot{a} g(t) dt$ . Comme :  $1 + \varepsilon \geq 0$ , on a donc:

$$w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N \dot{a} g(t) dt + (1 + \varepsilon) g(q) + w_q \quad \text{⑤.}$$

On peut alors conclure, en considérant les relations ④ et ⑤ :

$$(1 - \varepsilon) \int_1^N g(t) dt - (1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt + w_q \leq w_N \leq (1 + \varepsilon) \int_1^N g(t) dt + (1 + \varepsilon) g(q) + w_q$$

3) Montrons tout d'abord que :  $\int_1^N g(t) dt > 0$ . Supposons alors que :  $\int_1^N g(t) dt \leq 0$ . Comme  $g$  est positive sur  $[1, N]$ , on a également :  $\int_1^N g(t) dt \geq 0$ , donc :  $\int_1^N g(t) dt = 0$ , d'où  $g$  étant de signe constant sur  $[1, N]$  :

$\forall x \in ]1, N[$ ,  $g(x) = 0$  soit, comme  $g$  est décroissante et positive sur  $[c, +\infty[$  et comme  $N \geq q + 1 > c$  :

$\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $g(x) = 0$  d'où :

$$\int_1^{+\infty} g(t) dt = 0.$$

Ainsi, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} g(t) dt$  converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur  $g$ . On peut donc conclure :  $\int_1^N g(t) dt > 0$ .

En divisant alors par  $\int_1^N g(t) dt > 0$  dans la double inégalité du 2b, on peut écrire :

$$(1 - \varepsilon) - \frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^N g(t) dt} \leq \frac{w_N}{\int_1^N g(t) dt} \leq (1 + \varepsilon) + \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^N g(t) dt} \text{ ⑥.}$$

Montrons alors que la suite  $\left( \int_1^n g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge vers  $+\infty$ . Par définition, on peut écrire que la fonction  $\Psi : x \mapsto \int_1^x g(t) dt$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$ , et on a :  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $\Psi'(x) = g(x)$ . Ainsi,  $g$  étant positive sur  $[1, +\infty[$ ,  $\Psi$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ .

D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite, finie ou infinie, en  $+\infty$ .

De même, la suite  $\left( \int_1^n g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et admet donc une limite, finie ou infinie. Supposons alors qu'elle converge vers une limite  $\ell$ . Comme elle est croissante, on a alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_1^n g(t) dt \leq \ell$ .

De plus, comme :  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $x \leq E(x) + 1$ , on a,  $\Psi$  étant croissante sur  $[1, +\infty[$  :

$$\forall x \in [1, +\infty[ , \psi(x) \leq \psi(E(x) + 1) \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall x \in [1, +\infty[ , \int_1^x g(t) dt \leq \int_1^{E(x)+1} g(t) dt \quad \text{d'où, comme : } \forall x \in [1, +\infty[ , (E(x) + 1) \in \mathbb{N}^* :$$

$$\leq \ell$$

Ainsi, en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , d'après le théorème de prolongement des inégalités,  $\psi$  admet une limite finie en  $+\infty$ , donc l'intégrale  $\int_1^{+\infty} g(t) dt$  converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur  $g$ .

Ainsi, la suite  $\left( \int_1^n g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une limite infinie. Comme elle est croissante, on peut donc écrire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n g(t) dt = +\infty$ .

Comme :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n g(t) dt = +\infty$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^n g(t) dt} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^n g(t) dt} = 0.$$

Par définition de la limite d'une suite, on peut alors écrire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_1, +\infty[ , -\alpha \leq -\frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^n g(t) dt} \leq \alpha \quad \text{et :}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_2, +\infty[ , -\alpha \leq -\frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^n g(t) dt} \leq \alpha.$$

Ainsi, comme  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ , on peut écrire :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_1, +\infty[ , -\varepsilon \leq -\frac{(1 - \varepsilon) \int_1^q g(t) dt - w_q}{\int_1^n g(t) dt} \quad \text{et :}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_2, +\infty[ , \frac{(1 + \varepsilon)g(q) + w_q}{\int_1^n g(t) dt} \leq \varepsilon.$$

En considérant la relation  $\textcircled{6}$ , on peut alors écrire, en posant  $n_0 = \max(q + 1, n_1, n_2)$  :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \llbracket n_0, +\infty[ , 1 - 2\varepsilon \leq \frac{w_n}{\int_1^n g(t) dt} \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Cette double inégalité pour un  $\varepsilon$  quelconque dans  $]0, 1[$ , on peut donc écrire :

$$\forall \varepsilon \in ]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, 1 - 2\varepsilon \leq \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1 + 2\varepsilon \text{ soit, en posant } \varepsilon' = 2\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon \in ]0, 2[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, 1 - \varepsilon \leq \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1 + \varepsilon \quad \text{d'où ce résultat s'étendant aux cas } \varepsilon \geq 2 :$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [n_0, +\infty[, \left| \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Par définition de la limite d'une suite, on a donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\int_1^n g(t)dt} = 1$ . On peut finalement conclure :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)dt$$

- 4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $\forall x \in [1, +\infty[, g(x) = \frac{1}{x}$ . La fonction  $g$  est continue, positive et décroissante sur  $[1, +\infty[$  et l'intégrale  $\int_1^{+\infty} g(t)dt$  est divergente (intégrale de Riemann).

Soit alors  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme :  $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ , on peut donc écrire :

$w_{n+1} - w_n \sim g(n)$  et donc, d'après le résultat de la question précédente (avec  $c=1$ )

$$w_n \sim \int_1^n g(t)dt.$$

Or, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n g(t) dt = \int_1^n \frac{dt}{t}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} &= \ln n - \ln 1 \\ &= \ln n. \end{aligned}$$

et donc, comme  $\ln 1 = 0$  :

On peut donc conclure :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$