Enoncés

EXERCICE 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1.1 $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et de signe constant sur un intervalle $[a,+\infty[$ de $\mathbb{R}^+$, tendant vers α ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}^*}$ où $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty,+\infty\}$) en $+\infty$.

1.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$,

1.3 $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

1.4 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$,

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$.

EXERCICE 2

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

On rappelle que $I_0 = \sqrt{2p}$ et $I_1 = 0$ (cf chapitre Variables à densité).

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.

2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n en fonction de n.

EXERCICE 3

Soit $c \in [1,+\infty[$. On considère une fonction g positive, continue sur $[1,+\infty[$, décroissante sur $[c,+\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente. On considère également une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \sim g(n).$$

1) Soient q et N deux entiers naturels tels que : $c \leq q < N$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n).$$

b) En déduire que :

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q)$$

2) Soit ε un réel de $]0,1[$.

a) Montrer que :

$$\exists q \in [\![c,+\infty[\![,\ \forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ (1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1}-w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$$

b) En déduire que :

$$\forall N \in [\![q+1,+\infty[\![, (1-\varepsilon) \leq \int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) +$$

3) Montrer alors que :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)\,dt.$$

4) Prouver enfin que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

Corrections

EXERCICE 1

1) Trois cas se présentent :

- si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, par définition de la limite, on peut donc écrire : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq \frac{\alpha}{2} \geq 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge,

- Si $\alpha = +\infty$. Dans ce cas, on peut écrire, par définition de la limite : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq 1$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1\, dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty\}$. En raisonnant comme précédemment avec la fonction -f, on montrerait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge}}$$

2) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ en tant que quotidien (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[1,+\infty[$. De plus, on a :

$\forall t \in [e,+\infty[$, $\ln t \geq 1$ soit, en divisant par $t > 0$:

$\forall t \in [e,+\infty[,\ \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ étant continues et positives sur $[1,+\infty[$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt \text{ diverge}}$$

3) Deux cas se présentent :

- Si $\alpha \leq 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

  $\forall t \in [1,+\infty[, t^\alpha \leq 1$ d'où :

  $\forall t \in [1,+\infty[, -t^\alpha \geq -1$ et en composant par la fonction exponentielle (croissante) :

  $\forall t \in [1,+\infty[, e^{-t^\alpha} \geq e^{-1}$.

  Les fonctions $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ et $t \mapsto e^{-1}$ étant continues et positives sur $\mathbb{R}^+$, comme $\int_1^{+\infty} e^{-1}\,dt$ diverge (car l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt$ diverge), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ diverge, et donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ diverge.

- Si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, on a : $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^\alpha} = 0$ (croissances comparées), d'où :

  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall t > A, t^2 e^{-t^\alpha} \leq 1$ soit, en divisant par $t^2 > 0$ ($t \in \mathbb{R}_+^*$) :

  $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, e^{-t^\alpha} \leq \frac{1}{t^2}$.

  Les fonctions $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $\mathbb{R}_+^*$, comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt \text{ converge si et seulement si } \alpha \in \mathbb{R}_+^*}$$

4) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$.

- De plus, au voisinage de 0, on a : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ étant continues et positives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ converge.

- De même, au voisinage de 1, on a : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ étant continues et positives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge (en posant avec soin $u = 1-t$, on se ramène à une intégrale de Riemann convergente), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ converge.

- Comme les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt$ convergent, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}dt \text{ converge}}$$

5) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ est continue sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. De plus, au voisinage de1, on a : $\frac{1}{\ln|t|} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$. La fonction $t \mapsto 1-t$ étant de classe C^1 sur $[0,1[$, donc, pour tout $x \in [0,1[$, de classe C^1 sur $[0,x[$, en effectuant le changement de variable $u = 1-t$, du = - dt, on peut alors écrire : $\forall x \in [0,1[, \int_0^x \frac{dt}{t-1} = -\int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$.

Or, comme $\int_0^1 \frac{du}{u}$ diverge (intégrale de Riemann), la fonction $x \mapsto \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$ n'admet également pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc l'intégrale $x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ diverge.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ étant continues et négatives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ diverge, les critères de comparaison des intégrales de fonctions de signe constant nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$ diverge, et donc :

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|} \text{ diverge}}$$

EXERCICE 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus, on a : $\lim\limits_{x \to \infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ (croissance comparées). D'après la définition de la limite, on peut donc écrire :

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 1$ d'où :

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{t^2}$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann), et comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \geq 0$, on peut donc écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge. De même, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = 0$, on peut écrire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \left| t^n e^{-\frac{t}{2}} \right| dt$ converge, donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \left| t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt$ est absolument convergente. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, I_n \text{ converge}}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On a :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+1} t \, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant de classe C^1 sur $[0,x] (x \in \mathbb{R}^+)$, en effectuant une intégration par parties (on intègre $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ et on dérive $t \mapsto t^{n+1}$), on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = [-t^{n+1} e^{-\frac{t}{2}}]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-\frac{t}{2}}$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = -x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n+1)\int_0^x t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\int_0^{+\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. De même, on a : $\int_{-\infty}^{0} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (n+1)\int_{-\infty}^{0} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On peut finalement conclure, d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = (n+1) I_n}$$

3) Montrons alors par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!} I_0 \\ I_{2p+1} = 2^p p! I_1 \end{cases}$.

- Au rang $p = 0$. On a bien : $I_0 = I_0$ et $I_1 = I_1$. La propriété est donc bien vérifiée au rang $p = 0$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!} I_0 \\ I_{2p+1} = 2^p p! I_1 \end{cases}$. D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire : $\begin{cases} I_{2p+2} = (2p+1)\dfrac{(2p)!}{2^p p!} I_0 \\ I_{2p+3} = (2p+2)2^p p! I_1 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} I_{2p+2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{p+1}(p+1)!} \\ I_{2p+3} = 2^{p+1}(p+1)! I_1 \end{cases}$. Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $p+1$.

- Ainsi, on a bien : $\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!} I_0 \\ I_{2p+1} = 2^p p! I_1 \end{cases}$

- De plus, on a :

  $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ d'où, comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité : $= \sqrt{2\pi}$.

  De même, comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de la loi normale centrée réduite, on peut écrire, en considérant une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite : $I_1 = E(X)$, donc : $I_1 = 0$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{2\pi} \\ I_{2p+1} = 0 \end{cases}}$$

EXERCICE 3

1) a) Comme q est supérieur ou égal à c, la fonction g est décroissante sur $[q,+\infty[$, donc, pour tout $n \in [\![q,+\infty[\![$, sur $[n,n+1]$, et on a :

$$\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ \forall t \in [n,n+1],\ g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$$

D'où, en intégrant ces inégalités sur $[n,n+1]$, les fonctions en présence étant continues, pour tout $n \in [\![q,+\infty[\![$, sur $[n,n+1]$ (car : $\forall n \in [\![q,+\infty[\![, [n,n+1] \subset [1,+\infty[$) **:**

$$\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ \int_n^{n+1} g(n+1)\,dt \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(n)\,dt\,.$$

Or, on a :

$$\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ \int_n^{n+1} g(n+1)\,dt = (n+1-1)g(n+1) = g(n+1)$$ donc : et :

$$\forall n \in [\![q,+\infty[\![,\ \int_n^{n+1} g(n)\,dt = g(n)\,.$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in [\![q,+\infty[\![, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)\,dt \leq g(n)}$$

b) En sommant alors l'inégalité de droite de $n = q$ à $n = N-1$ $(N > q)$, on obtient :

$$\sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t)\,dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n)$$ soit, d'après la relation de Chasles :

$$\int_q^N g(t)\,dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n)$$

De même, en sommant l'inégalité de gauche de $n = q$ à $n = N - 1$ $(N > q)$, on peut écrire :

$\sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) \le \sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t)\,dt$ d'où, d'après la relation de Chasles, et en effectuant le changement d'indice $n' = n + 1$ dans la somme de gauche :

$\sum_{n=q+1}^{N} g(n) \le \int_q^N g(t)\,dt$ soit encore :

$\sum_{n=q}^{N-1} g(n) - g(q) + g(N) \le \int_q^N g(t)\,dt$ i.e. :

$\sum_{n=q}^{N} g(n) \le \int_q^N g(t)\,dt + g(q) - g(N)$ et donc, comme $g(N) \ge 0$ (car $N > q \ge c \ge 1$) :

$$\le \int_q^N g(t)\,dt + g(q) \quad ②$$

En considérant les relations ① et ②, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\int_q^N g(t)\,dt \le \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \le \int_q^N g(t)dt + g(q)}$$

2) a) Comme par hypothèse, on a : $w_{n+1} - w_n \sim g(n)$, on peut écrire, par définition de l'équivalent, qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 1 quand n tend vers $+\infty$ telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \ge n_0, w_{n+1} - w_n = h_n g(n)$. De plus, comme : $\lim_{n\to\infty} h_n = 1$, on peut écrire d'après la définition de la limite d'une suite :

$\exists q \in [c,+\infty[\cap [\![n_0,+\infty[\![, \forall n \ge q, 1 - \varepsilon \le h_n \le 1 + \varepsilon$ et donc en multipliant par $g(n) \ge 0$:

$\exists q \in [c,+\infty[\cap [\![n_0,+\infty[\![, \forall n \ge q, (1-\varepsilon)g(n) \le h_n g(n) \le (1+\varepsilon)g(n)$ soit, comme : $\forall n \ge n_0$, $h_n g(n) = w_{n+1} - w_n$

$\exists q \in [c,+\infty[\cap [\![n_0,+\infty[\![, \forall n \ge q, (1-\varepsilon)g(n) \le w_{n+1} - w_n \le (1+\varepsilon)g(n)$.

On peut donc conclure :

Il existe un entier naturel q supérieur ou égal à c tel que :
$\forall n \in [\![q,+\infty[\![, (1-\varepsilon)g(n) \le w_{n+1} - w_n \le (1+\varepsilon)g(n)$

b) En sommant les inégalités précédentes de n=q à n=N-1 (N>q), on a alors :

$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \sum_{n=q}^{N-1}(w_{n+1}-w_n) \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n)$ soit, les termes s'éliminant deux à deux dans la troisième somme :

$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq w_N - w_q \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n)$ i.e. :

$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) + w_q$ ④

De plus, en multipliant l'inégalité de gauche du 1b par $1-\varepsilon$ $(1-\varepsilon \geq 0$ car $\varepsilon<1)$, on peut écrire :

$(1-\varepsilon)\int_q^N g(t)dt \leq (1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n)$ d'où, d'après la relation ④ :

$(1-\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + w_q \leq w_N$ soit, comme : $\int_q^N g(t)dt = \int_1^N g(t)dt - \int_1^q g(t)dt$ (relation de Chasles, g étant continue sur $[1,N]$) :

$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N$.

De même, en multipliant l'inégalité de droite du 1b par $1+\varepsilon$ $(1+\varepsilon \geq 0$ car $\varepsilon > 0)$, on peut écrire :

$(1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq (1+\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q)$ d'où, d'après la relation ④ :

$w_N \leq (1+\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) + w_q$

Or on a, d'après la relation de Chasles, g étant continue sur $[1,n]$:

$\int_q^N g(t)dt = \int_1^N g(t)dt - \int_1^q g(t)dt$ d'où comme :

$\int_1^q g(t)dt \geq 0$ (car g est positive sur $[1,+\infty[$) : $\int_q^N g(t)dt \leq \int_1^N g(t)dt$. Comme : $1+\varepsilon \geq 0$, on a donc:

$w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,dt + (1+\varepsilon)\,g(q) + w_q$ ⑤.

On peut alors conclure, en considérant les relations ④ et ⑤ :

$$\boxed{(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)\,dt-(1-\varepsilon)\int_1^q g(t) + w_q \le w_N \le (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,dt+(1+\varepsilon)\,g(q)+w_q}$$

3) Montrons tout d'abord que : $\int_1^N g(t)\,dt>0$. Supposons alors que : $\int_1^N g(t)\,dt \le 0$. Comme g est positive sur $[1,N]$, on a également : $\int_1^N g(t)\,dt \ge 0$, donc : $\int_1^N g(t)\,dt=0$, d'où g étant de signe constant sur $[1,N]$:

$\forall x \in]1,N[,\ g(x)=0$ soit, comme g est décroissante et positive sur $[c,+\infty[$ et comme $N \ge q+1> c$:

$\forall x \in]1,+\infty[,\ g(x)=0$ d'où :

$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt=0$.

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur g. On peut donc conclure : $\int_1^N g(t)\,dt>0$.

En divisant alors par $\int_1^N g(t)\,dt>0$ dans la double inégalité du 2b, on peut écrire :

$$(1-\varepsilon)-\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,dt-w_q}{\int_1^N g(t)\,dt} \le \frac{w_N}{\int_1^N g(t)\,dt} \le (1+\varepsilon)+\frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^N g(t)\,dt} \quad ⑥.$$

Montrons alors que la suite $\left(\int_1^n g(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Par définition, on peut écrire que la fonction $\Psi : x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est dérivable sur $[1,+\infty[$, et on a : $\forall x \in [1,+\infty[,\ \Psi'(x)=g(x)$. Ainsi, g étant positive sur $[1,+\infty[$, Ψ est croissante sur $[1,+\infty[$.

D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

De même, la suite $\left(\int_1^n g(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et admet donc une limite, finie ou infinie. Supposons alors qu'elle converge vers une limite ℓ. Comme elle est croissante, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_1^n g(t)\,dt \le \ell$.

De plus, comme : $\forall x \in [1,+\infty[,\ x \le E(x)+1$, on a, Ψ étant croissante sur $[1,+\infty[$:

$\forall x \in [1,+\infty[,\ \psi(x) \le \psi(E(x)+1)$ i.e. :

$\forall x \in [1,+\infty[,\ \int_1^x g(t)\ dt \le \underbrace{\int_1^{E(x)+1} g(t)\ dt}_{\le \ell}$ d'où, comme : $\forall x \in [1,+\infty[,\ (E(x)+1) \in \mathbb{N}^*$:

Ainsi, en faisant tendre x vers $+\infty$, d'après le théorème de prolongement des inégalités, ψ admet une limite finie en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\ dt$ converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur g.

Ainsi, la suite $\left(\int_1^n g(t)\ dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite infinie. Comme elle est croissante, on peut donc écrire : $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n g(t)\ dt = +\infty$.

Comme : $\lim_{n\to+\infty} \int_1^n g(t)\ dt = +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} - \frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\ dt - w_q}{\int_1^n g(t)\ dt} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^n g(t)\ dt} = 0.$$

Par définition de la limite d'une suite, on peut alors écrire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_1,+\infty[\![, -\alpha \le -\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\ dt - w_q}{\int_1^n g(t)\ dt} \le \alpha \qquad \text{et :}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_2,+\infty[\![, -\alpha \le -\frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^n g(t)\ dt} \le \alpha.$$

Ainsi, comme $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_1,+\infty[\![, -\varepsilon \le -\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\ dt - w_q}{\int_1^n g(t)\ dt} \qquad \text{et :}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_2,+\infty[\![, \frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^n g(t)\ dt} \le \varepsilon.$$

En considérant la relation ⑥, on peut alors écrire, en posant $n_0 = \max(q+1, n_1, n_2)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0,+\infty[\![, 1-2\varepsilon \le \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \le 1+2\varepsilon.$$

Cette double inégalité pour un ε quelconque dans $]0,1[$, on peut donc écrire :

$$\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0,+\infty[\![, 1-2\varepsilon \leq \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1+2\varepsilon$$ soit, en posant $\varepsilon' = 2\varepsilon$

$$\forall \varepsilon \in]0,2[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0,+\infty[\![, 1-\varepsilon \leq \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1+\varepsilon$$ d'où ce résultat s'étendant aux cas $\varepsilon \geq 2$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0,+\infty[\![, \left|\frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Par définition de la limite d'une suite, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} = 1$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{w_n \sim \int_1^n g(t)dt}$$

4) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $\forall x \in [1,+\infty[, g(x) = \frac{1}{x}$. La fonction g est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est divergente (intégrale de Riemann).

Soit alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1}.$$

Comme : $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on peut donc écrire :

$w_{n+1} - w_n \sim g(n)$ et donc, d'après le résultat de la question précédente (avec c=1)

$$w_n \sim \int_1^n g(t)dt.$$

Or, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n g(t)dt = \int_1^n \frac{dt}{t}$ soit encore :

$= \ln n - \ln 1$ et donc, comme $\ln 1 = 0$:

$= \ln n.$

On peut donc conclure :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n}$$