Méthodes

I. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

- ***Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans*** $\mathbb{R}^2$**.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes. L'application $(X,Y):\left|\begin{array}{l}\Omega \to \mathbb{R}^2 \\ \omega \mapsto (X(\omega),Y(\omega))\end{array}\right.$ est un vecteur aléatoire discret à valeur dans $\mathbb{R}^2$ (ou couple de variables aléatoires réelles discrètes).

- ***Loi de probabilité ou loi conjointe de (X,Y).*** On appelle loi de probabilité (ou loi conjointe) d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes (X,Y), l'application $p:\left|\begin{array}{l}(X,Y)(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (i,j) \mapsto p([X=i]\cap[Y=j])\end{array}\right.$.

- ***Loi marginale de X***. Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On appelle loi marginale de X, l'application $p:\left|\begin{array}{l}X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto \sum\limits_{j\in Y(\Omega)} p([X=i]\cap[Y=j])\end{array}\right.$.

- ***Loi conditionnelle de X sachant [Y=j].*** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $j \in Y(\Omega)$ tel que p(Y = j) $\neq$ 0. On appelle loi conditionnelle de X sachant [Y=j], l'application :
$$p:\left|\begin{array}{l}X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto p\left(X=i/Y=j\right) = \dfrac{p([X=i]\cap[Y=j])}{p(Y=j)}\end{array}\right..$$

- ***Indépendance de deux variables aléatoires.*** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. X et Y sont indépendantes si $\forall (i,j) \in (X,Y)(\Omega), p([X=i]\cap[Y=j]) = p(X=i)\,p(Y=j)$.

II. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- ***Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans*** $\mathbb{R}^n$***.*** Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1\le i\le n}$ n variables aléatoires réelles discrètes.
L'application $(X_i)_{1\le i\le n}:\left|\begin{array}{l}\Omega \to \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto (X_i(\omega))_{1\le i\le n}\end{array}\right.$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- ***Loi de probabilité de (X*** $(X_i)_{1=i=n}$***.*** On appelle loi du vecteur aléatoire discret $(X_i)_{1\le i\le n}$, l'application $p:\left|\begin{array}{l}(X_i)_{1\le i\le n}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (K_i)_{1\le i\le n} \mapsto p\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i=K_i]\right)\end{array}\right.$, également notée
$$p:\left|\begin{array}{l}(X_i)_{1\le i\le n}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ (K_i)_{1\le i\le n} \mapsto p(X_1=K_1, X_2=K_2,\ldots,X_n=K_n)\end{array}\right..$$

- ***Loi marginale de X_1***. Soit $(X_i)_{1\le i\le n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On appelle loi marginale de X_1, l'application $p : \left| \begin{array}{l} X_1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto \displaystyle\sum_{(K_j)_{2\le j\le n} \in (X_j)_{2\le j\le n}(\Omega)} p\left(\left[X_1 = i\right] \cap \left(\bigcap_{j=2}^{n} \left[X_j = K_j\right]\right)\right) \end{array}\right.$.

- ***Indépendance.*** Soit $(X_i)_{1\le i\le n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Les variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si :
$$\forall (K_i)_{1\le i\le n} \in (X_i)_{1\le i\le n}(\Omega), p\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left[X_i = K_i\right]\right) = p\left(X_1 = K_1, X_2 = K_2, \dots, X_n = K_n\right) = \prod_{i=1}^{n} p\left(X_i = K_i\right).$$

- Soit $(X_i)_{1\le i\le n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si les variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le n}$ sont indépendantes, alors :

  -toute permutation de $(X_i)_{1\le i\le n}$ est indépendante,
  -pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, les variables aléatoires $(X_i)_{1\le i\le p}$ sont indépendantes et :
  -pour tout $p \in [\![1,n-1]\!]$, toute fonction de $(X_i)_{1\le i\le p}$ est indépendante de toute fonction de $(X_i)_{p+1\le i\le n}$.

  Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes. Cette suite est une suite de variables aléatoires indépendantes si toute sous-suite finie de cette suite est constituée de variables aléatoires indépendantes.

III. Opérations sur les variables aléatoires

- ***Linéarité de l'espérance***. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance. On a : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

- ***Covariance***. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que XY admette également une espérance. On appelle covariance de X et Y et on note $\mathrm{cov}(X,Y)$, le nombre :

  $\mathrm{cov}(X,Y) = E\left(((X - E(X)(Y - E(Y))\right)$ soit :
  $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$.

  En particulier, on a : $\mathrm{cov}(X,X) = V(X)$.

- ***Propriétés de la covariance***. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que XZ et YZ admettent également une espérance.

  On a :

  $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{cov}(aX + bY, Z) = a\ \mathrm{cov}(X,Z) + b\ \mathrm{cov}(Y,Z)$,
  $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$,
  $\left|\mathrm{cov}(X,Y)\right| \le \sqrt{V(X)V(Y)}$.

- ***Variance d'une somme***. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une variance et telles que XY admette une espérance. On a :
  $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$.

  Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour toute suite $(X_i)_{1\le i\le n}$ de variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$, X_iX_j admette une espérance, on a

  $$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

  Soient I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, f une fonction définie sur $(X,Y)(\Omega)$ et $Z = f(X,Y)$. Z est une variable aléatoire discrète et, si la double somme $\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \left|f(x_i,y_j)\, p([X = x_i]\cap[Y = y_j])\right|$ existe, alors Z admet une espérance et cette espérance vaut : $E(Z) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(x_i,y_j)\, p([X = x_i]\cap[Y = y_j])$.

  En particulier, si E(XY) existe, on a : $E(XY) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} x_i y_j\, p([X = x_i]\cap[Y = y_j])$.

Indépendance. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes. On a alors :

- $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ (si X et Y admettent une espérance);
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ (si X et Y admettent une variance).

Coefficient de corrélation linéaire. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes non constantes ou quasi-constantes. On appelle coefficient de corrélation linéaire et on note $\rho_{x,y}$ le nombre : $\rho_{x,y} = \dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$.

On a : $|\rho_{x,y}| \le 1$ et $\rho_{x,y} = 1$ et si et seulement si $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, Y = aX + b$. Y est alors dite fonction quasi-affine de X.

Stabilité pour la somme des lois binomiale et de Poisson. Soient X et X' deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes,

- si X suit $\mathcal{B}(n,p)$ et X' suit $\mathcal{B}(n',p)$, alors (X+X') suit $\mathcal{B}(n+n',p)$,
- si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ et X' suit $\mathcal{P}(\lambda')$, alors (X+X') suit $\mathcal{P}(\lambda+\lambda')$.