Nature d'une série

Enoncés

1) Déterminer la nature des séries dont le terme général est défini par :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$,

c) $\forall n \geq 2, z_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

2) Soient α et β deux réels avec $\alpha < 1$. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

3) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs et p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général u_n^p converge.

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente et telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 .$$

a) Montrer que $\exists\, q \in \,]0,1[,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in [\![n_0, +\infty [\![,\ 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Corrections

1) a) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc d'après les équivalents de référence : $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann, 2>1), on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs (en effet : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \frac{1}{2n^2}\geq 0$) :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge}}$$

b) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \left|\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, \begin{cases}\left|\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}\right|\geq 0\\ \frac{1}{n\sqrt{n}}\geq 0\end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $\left|\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}\right|$ converge, donc que la série de terme général $\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, et donc que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}} \text{ converge}}$$

c) On a : $\forall n\in [\![2,+\infty[\![, z_n=\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ soit encore :

$$=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Déterminons alors un équivalent de z_n quand n tend vers $+\infty$. Quand x est au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \qquad \text{donc :}$$

$$x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \qquad \text{d'où :}$$

$x+\ln(1-x)\underset{0}{\sim}-\frac{x^2}{2}$

$z_n \sim -\frac{1}{2n^2}$

$-z_n \sim \frac{1}{2n^2}$

et donc, comme : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

d'où :

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ $(n\geq 1)$ converge (série de Riemann, 2>1), on peut alors écrire la suite $\left(\frac{1}{2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant positive et d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, que la série de terme général $-z_n$ $(n\geq 2)$ converge, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } z_n \ (n\geq 2) \text{ converge.}}$$

2) Comme $\alpha<1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\ln^{\beta} n=0$ (croissances comparées). Comme $0<1$, on en déduit alors :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ n^{\alpha-1}\ln^{\beta} n<1$, d'où en divisant par $n^{\alpha}\ln^{\beta} n>0$ (pour $n\geq 2$) :

$\exists n_0\in [\![2,+\infty[\![,\ \forall n\geq n_0,\ \frac{1}{n}<\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$.

Comme $\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \begin{cases}\frac{1}{n}\geq 0\\ \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}\geq 0\end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors de conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n} \text{ diverge}}$$

3) Comme la série de terme général u_n converge, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. Par définition de la limite d'une suite, on peut donc écrire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs :

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0\leq u_n\leq 1$

donc la fonction $x\to x^{p-1}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0\leq u_n{}^{p-1}\leq 1$

d'où en multipliant par $u_n\geq 0$:

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0\leq u_n{}^{p}\leq u_n$

Comme la série de terme général u_n converge, on peut donc conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n{}^p \text{ converge}}$$

4) a) Soit ℓ la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\ell\in[0,1[$, il existe $q\in]0,1[$ tel que : $0\leq\ell<q<1$ (par exemple : $q=\frac{\ell+1}{2}$). De plus, d'après la définition de la limite, on peut écrire :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<q$, et donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive :

$$\boxed{\exists q\in]0,1[,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q}$$

b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, on peut alors écrire :

$\forall k\geq n_0,\ 0<u_{k+1}\leq qu_k$ soit, en multipliant ces relations membre à membre pour $k=n_0$ à $k=n-1$ $(n>n_0)$ et en divisant la relation obtenue par $u_{n_0+1}\,u_{n_0+2}\ \ldots\ u_{n-1}>0$

$\forall n>n_0,\ 0<u_n\leq q^{n-n_0}u_{n_0}$ i.e. :

$\forall n>n_0,\ 0<u_n\leq q^n\frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.

Comme $q\in\,]0,1[$, on peut écrire que la série de terme général q^n converge, donc que la série de terme général $q^n\frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$ converge également. Les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors de conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$