

Nature d'une série

Enoncés

1) Déterminer la nature des séries dont le terme général est défini par :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right),$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}},$

c) $\forall n \geq 2, z_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right).$

2) Soient α et β deux réels avec $\alpha < 1$. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

3) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs et p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général u_n^p converge.

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente et telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

a) Montrer que $\exists q \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket n_0, +\infty \llbracket, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Corrections

- 1) a) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après les équivalents de référence : $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann, $2 > 1$), on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs (en effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n^2} \geq 0$) :

La série de terme général u_n converge

- b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \left| \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}} \right| \geq 0 \\ \frac{1}{n\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge

(série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $\left| \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}} \right|$ converge, donc que la série de terme général $\frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, et donc que :

La série de terme général $\frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$ converge

- c) On a : $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, z_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ soit encore :
- $$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Déterminons alors un équivalent de z_n quand n tend vers $+\infty$. Quand x est au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{donc :}$$

$$x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{d'où :}$$

Nature d'une série

$$x + \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

et donc, comme : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$z_n \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

d'où :

$$-z_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ ($n \geq 1$) converge (série de Riemann, $2 > 1$), on peut alors écrire la suite $\left(\frac{1}{2n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant positive et d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, que la série de terme général $-z_n$ ($n \geq 2$) converge, et l'on peut donc conclure :

La série de terme général z_n ($n \geq 2$) converge.

2) Comme $\alpha < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha-1} \ln^\beta n = 0$ (croissances comparées). Comme $0 < 1$, on en déduit alors :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n^{\alpha-1} \ln^\beta n < 1$, d'où en divisant par $n^\alpha \ln^\beta n > 0$ (pour $n \geq 2$) :

$$\exists n_0 \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

Comme $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \begin{cases} \frac{1}{n} \geq 0 \\ \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \geq 0 \end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, les règles de

comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors de conclure :

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ diverge

3) Comme la série de terme général u_n converge, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Par définition de la limite d'une suite, on peut donc écrire la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à termes positifs :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq 1$$

donc la fonction $x \rightarrow x^{p-1}$ étant croissante sur \mathbb{R}^+ :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq u_n^{p-1} \leq 1$$

d'où en multipliant par $u_n \geq 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq u_n^p \leq u_n$$

Nature d'une série

Comme la série de terme général u_n converge, on peut donc conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs :

La série de terme général u_n^p converge

4) a) Soit ℓ la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\ell \in]0, 1[$, il existe $q \in]0, 1[$ tel que : $0 \leq \ell < q < 1$

(par exemple : $q = \frac{\ell + 1}{2}$). De plus, d'après la définition de la limite, on peut écrire :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, et donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive :

$$\forall q \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \llbracket n_0, +\infty[, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$$

b) Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, on peut alors écrire :

$\forall k \geq n_0, 0 < u_{k+1} \leq q u_k$ soit, en multipliant ces relations membre à membre pour $k = n_0$ à $k = n - 1$ ($n > n_0$) et en divisant la relation obtenue par $u_{n_0+1} u_{n_0+2} \dots u_{n-1} > 0$

$\forall n > n_0, 0 < u_n \leq q^{n-n_0} u_{n_0}$ i.e. :

$$\forall n > n_0, 0 < u_n \leq q^n \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$$

Comme $q \in]0, 1[$, on peut écrire que la série de terme général q^n converge, donc que la série de terme général $q^n \frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$ converge également. Les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors de conclure :

La série de terme général u_n converge.