Nature d'une série

Méthodes

1. Définition de la convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série de terme général u_n converge de somme ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite des sommes partielles) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ et on note alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$. Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge.

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Notations. Pour parler de la série de terme général u_n, on doit écrire : « la série de terme général u_n converge », ou bien « $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ».

Attention, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ne désigne pas la série de terme général u_n mais sa somme, dans le cas où elle converge : c'est un réel.

2. Comparaison des séries à termes positifs

Se souvenir que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ u_n\leq v_n$, alors :

si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge également,

si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge également,

Si $u_n\sim v_n$, alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

En général, les séries utilisées pour les critères de comparaison sont :

-les séries de référence,
-une série étudiée préalablement.

Attention…Les comparaisons doivent être effectuées sur les termes généraux et non sur les sommes : dans cette méthode, on n'utilise jamais de sommation.

3. Séries absolument convergentes

On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Toute série absolument convergente est convergente. Attention, si la série de terme général $|u_n|$ diverge, on ne peut pas conclure.

4. Séries de référence

- Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général q^n est convergente si et seulement si $|q|<1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$ (série géométrique).

- Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général nq^n est convergente si et seulement si $|q|<1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

- Soit $q \in \mathbb{R}$. La série de terme général n^2q^n est convergente si et seulement si $|q|<1$ et on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente et on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (série exponentielle).

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$ (série de Riemann).