

## Suite définie à l'aide d'une fonction

## Énoncé

0) Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergant vers un réel  $a$  strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, z_n \geq \frac{a}{2}.$$

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - x^2$$

On note alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par la donnée de  $u_0 \in ]0, 1[$  et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1) Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

b) Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nu_n.$$

Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante. En déduire qu'elle converge vers une limite  $\ell$  appartenant à  $]0, 1]$ .

c) Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n(v_{n+1} - v_n).$$

Montrer que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite vaut  $\ell(1 - \ell)$ .

## Suite définie à l'aide d'une fonction

3) a) On suppose que  $\ell$  est différent de 1. Montrer qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que :

$$\forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_n \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2n}.$$

b) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

c) Conclure.

4) A l'aide du résultat de la question 2b, montrer que :

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

## Correction

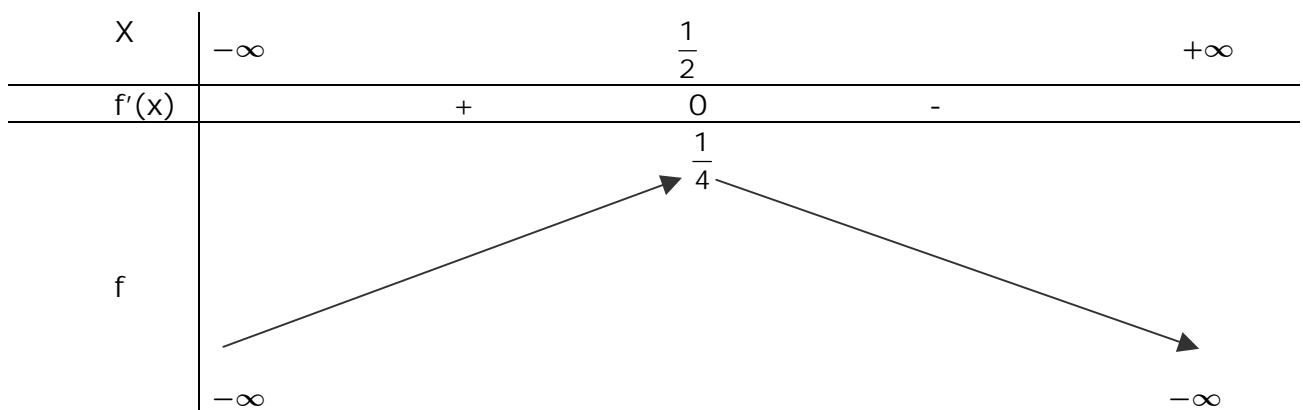
0) Comme  $a$  est strictement positif, on a :  $a > \frac{a}{2}$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = a$ , on peut donc en conclure, par définition de la limite d'une suite :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, z_n \geq \frac{a}{2}}$$

1)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme fonction polynôme définie sur  $\mathbb{R}$ , et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2x.$$

Il en découle le tableau de variations suivant :



(Les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  découlent de la prépondérance de  $x \mapsto x^2$  sur  $x \mapsto x$  en  $\pm\infty$ ).

2) a) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ .

- Au rang  $n=0$ . Par définition, on a :  $0 < u_0 < 1$ , donc la proposition est vraie au rang  $n=0$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que :  $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ .

Deux cas se présentent :

si  $n=0$ . Dans ce cas, d'après les variations de  $f$  étudiées précédemment, on a :  $f(u_0) \leq \frac{1}{4}$

donc, comme  $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$  :  $u_1 < \frac{1}{2}$ .

## Suite définie à l'aide d'une fonction

Si  $n \geq 1$ . Dans ce cas, on a :  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ .  $f$  étant strictement croissante sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , on peut alors écrire, par hypothèse de récurrence :

$$f(0) < f(u_n) < f\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad \text{d'où :}$$

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{i.e. :}$$

$$0 < u_{n+1} < \frac{n}{(n+1)^2}.$$

De plus, on a, par stricte décroissance de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{n} > n+2 \quad \text{donc en multipliant par } n > 0 :$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \quad \text{d'où :}$$

$$\Leftrightarrow 1 > 0.$$

Ainsi, on a :  $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$  d'où :

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, la proposition est vraie au rang  $n+1$ .

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ , on peut alors conclure, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

## Suite définie à l'aide d'une fonction

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n &= (n+1)u_{n+1} - nu_n \quad \text{d'où :} \\ &= (n+1)u_n - (n+1)u_n^2 - nu_n \quad \text{donc :} \\ &= u_n - (n+1)u_n^2 \quad \text{i.e. :} \\ &= u_n(1 - (n+1)u_n). \end{aligned}$$

Or, comme  $n+1 > 0$ , on peut écrire, d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_n < 1 \quad \text{d'où, comme : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0 :$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(1 - (n+1)u_n) > 0 \quad \text{et donc :}$$

La suite  $(v_n)$  est strictement croissante.

D'après le résultat de la question 2a, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < \frac{n}{n+1} \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 1.$$

Ainsi, la suite  $(v_n)$  est croissante et majorée, donc elle converge. De plus, la suite  $(v_n)$  étant strictement croissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < v_0 < v_n < 1 \quad \text{donc, par prolongement des inégalités :}$$

$$0 < v_0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq 1.$$

On peut finalement conclure :

La suite  $(v_n)$  converge vers une limite  $\ell \in ]0, 1]$

c) En reprenant les calculs effectués précédemment, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = nu_n(1 - (n+1)u_n) \quad \text{soit encore :}$$

$$= v_n \left(1 - \frac{n+1}{n} v_n\right).$$

## Suite définie à l'aide d'une fonction

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , on peut finalement conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell(1 - \ell)$$

3) a) Comme  $\ell \in ]0, 1[$  (par hypothèse  $\ell \neq 1$ ), on peut écrire, d'après le résultat de la question 0 (avec  $\ell(1 - \ell) > 0$ ) :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, w_n \geq \frac{\ell(1 - \ell)}{2}$  d'où en divisant par  $n > 0$  (en considérant que  $n_0 > 0$ ) :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_n \geq \frac{\ell(1 - \ell)}{2n}$$

b) En sommant les inégalités précédentes, on peut écrire:

$\forall n \geq n_0, \sum_{k=n_0}^n (v_{k+1} - v_k) \geq \frac{\ell(1 - \ell)}{2} \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k}$  d'où :

$\forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_{n_0} \geq \frac{\ell(1 - \ell)}{2} \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k}$ .

Or, comme la série  $\sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k}$  diverge (Riemann), la suite  $\left( \sum_{k=n_0}^n \frac{1}{k} \right)_{n \geq n_0}$  diverge et, comme elle est croissante, tend donc vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Par prolongement des inégalités, il suit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

c) Comme la suite  $(v_n)$  converge, on peut écrire que le résultat précédent est absurde, donc que l'hypothèse  $\ell \neq 1$  est fautive. On peut finalement conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

4) Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$  et comme  $\ell \neq 0$ , on a :  $v_n \sim 1$  d'où :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$