Suite définie à l'aide d'une fonction

Enoncé

0) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel a strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, z_n \geq \frac{a}{2}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - x^2$$

On note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in]0,1[$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nu_n.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En déduire qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $]0,1]$.

c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n(v_{n+1} - v_n).$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $\ell(1-\ell)$.

3) a) On suppose que ℓ est différent de 1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_n \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2n}.$$

b) En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

c) Conclure.

4) A l'aide du résultat de la question 2b, montrer que :

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

Correction

0) Comme a est strictement positif, on a : $a > \frac{a}{2}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = a$, on peut donc en conclure, par définition de la limite d'une suite :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, z_n \geq \frac{a}{2}}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$, et l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2x$.

Il en découle le tableau de variations suivant :

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f		↗	$\frac{1}{4}$	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

(Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ découlent de la prépondérance de $x \mapsto x^2$ sur $x \mapsto x$ en $\pm\infty$).

2) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

- Au rang n=0. Par définition, on a : $0 < u_0 < 1$, donc la proposition est vraie au rang n=0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

Deux cas se présentent :

si n=0. Dans ce cas, d'après les variations de f étudiées précédemment, on a : $f(u_0) \leq \frac{1}{4}$ donc, comme $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$: $u_1 < \frac{1}{2}$.

Si $n \geq 1$. Dans ce cas, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. f étant strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, on peut alors écrire, par hypothèse de récurrence :

$f(0) < f(u_n) < f(\frac{1}{n+1})$ d'où :

$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$ i.e. :

$0 < u_{n+1} < \frac{n}{(n+1)^2}$.

De plus, on a, par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{n} > n+2$ donc en multipliant par $n > 0$:

$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ d'où :

$\Leftrightarrow 1 > 0$.

Ainsi, on a : $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$ d'où :

$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

Ainsi, la proposition est vraie au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on peut alors conclure, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

b) On a :

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$ d'où :

$= (n+1)u_n - (n+1)u_n^2 - nu_n$ donc :

$= u_n - (n+1)u_n^2$ i.e. :

$= u_n(1-(n+1)u_n)$.

Or, comme $n+1>0$, on peut écrire, d'après le résultat de la question précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_n < 1$ d'où, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(1-(n+1)u_n) > 0$ et donc :

La suite (v_n) est strictement croissante.

D'après le résultat de la question 2a, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < \dfrac{n}{n+1}$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 1$.

Ainsi, la suite (v_n) est croissante et majorée, donc elle converge. De plus, la suite (v_n) étant strictement croissante, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < v_0 < v_n < 1$ donc, par prolongement des inégalités :

$0 < v_0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leq 1$.

On peut finalement conclure :

La suite (v_n) converge vers une limite $\ell \in \left]0,1\right]$

c) En reprenant les calculs effectués précédemment, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = nu_n(1-(n+1)u_n)$ soit encore :

$= v_n(1 - \dfrac{n+1}{n} v_n)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell(1-\ell)}$$

3) a) Comme $\ell \in \left]0,1\right[$ (par hypothèse $\ell \neq 1$), on peut écrire, d'après le résultat de la question 0 (avec $\ell(1-\ell) > 0$) :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, w_n \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2}$ d'où en divisant par $n > 0$ (en considérant que $n_0 > 0$) :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_n \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2n}}$$

b) En sommant les inégalités précédentes, on peut écrire:

$\forall n \geq n_0,\quad \sum\limits_{k=n_0}^{n} (v_{k+1} - v_k) \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k}$ d'où :

$\forall n \geq n_0,\quad v_{n+1} - v_{n_0} \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k}$.

Or, comme la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Riemann), la suite $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\geq n_0}$ diverge et, comme elle est croissante, tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Par prolongement des inégalités, il suit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

c) Comme la suite (v_n) converge, on peut écrire que le résultat précédent est absurde, donc que l'hypothèse $\ell \neq 1$ est fausse. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

4) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ et comme $\ell \neq 0$, on a : $v_n \sim 1$ d'où :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$$