Suite définie à l'aide d'une fonction

Enoncé

0) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel a strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, z_n \geq \frac{a}{2}.$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - x^2$$

On note alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la donnée de $u_0 \in]0,1[$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = nu_n.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. En déduire qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $]0,1]$.

c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = n(v_{n+1} - v_n).$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $\ell(1-\ell)$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) a) On suppose que ℓ est différent de 1. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_n \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2n}.$$

b) En déduire que :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty.$$

c) Conclure.

4) A l'aide du résultat de la question 2b, montrer que :

$$u_n \sim \frac{1}{n}.$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

0) Comme a est strictement positif, on a : $a > \frac{a}{2}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, on peut donc en conclure, par définition de la limite d'une suite :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, z_n \geq \frac{a}{2}}$$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$, et l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2x$.

Il en découle le tableau de variations suivant :

X	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$

(Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ découlent de la prépondérance de $x \mapsto x^2$ sur $x \mapsto x$ en $\pm\infty$).

2) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

- Au rang n=0. Par définition, on a : $0 < u_0 < 1$, donc la proposition est vraie au rang n=0.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.

Deux cas se présentent :

si n=0. Dans ce cas, d'après les variations de f étudiées précédemment, on a : $f(u_0) \leq \frac{1}{4}$ donc, comme $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$: $u_1 < \frac{1}{2}$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Si $n \geq 1$. Dans ce cas, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. f étant strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on peut alors écrire, par hypothèse de récurrence :

$f(0) < f(u_n) < f(\frac{1}{n+1})$ d'où :

$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$ i.e. :

$0 < u_{n+1} < \frac{n}{(n+1)^2}$.

De plus, on a, par stricte décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{n} > n+2$ donc en multipliant par $n > 0$:

$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ d'où :

$\Leftrightarrow 1 > 0$.

Ainsi, on a : $\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}$ d'où :

$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$.

Ainsi, la proposition est vraie au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on peut alors conclure, d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b) On a :

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - nu_n$ d'où :

$= (n+1)u_n - (n+1)u_n^2 - nu_n$ donc :

$= u_n - (n+1)u_n^2$ i.e. :

$= u_n(1-(n+1)u_n)$.

Or, comme $n+1>0$, on peut écrire, d'après le résultat de la question précédente :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)u_n < 1$ d'où, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(1-(n+1)u_n) > 0$ et donc :

La suite (v_n) est strictement croissante.

D'après le résultat de la question 2a, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < \frac{n}{n+1}$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 1$.

Ainsi, la suite (v_n) est croissante et majorée, donc elle converge. De plus, la suite (v_n) étant strictement croissante, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < v_0 < v_n < 1$ donc, par prolongement des inégalités :

$0 < v_0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq 1$.

On peut finalement conclure :

La suite (v_n) converge vers une limite $\ell \in]0,1]$

c) En reprenant les calculs effectués précédemment, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = nu_n(1-(n+1)u_n)$ soit encore :

$= v_n(1-\frac{n+1}{n}v_n)$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \ell(1-\ell)}$$

3) a) Comme $\ell \in]0,1[$ (par hypothèse $\ell \neq 1$), on peut écrire, d'après le résultat de la question 0 (avec $\ell(1-\ell) > 0$) :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, w_n \geq \dfrac{\ell(1-\ell)}{2}$ d'où en divisant par $n > 0$ (en considérant que $n_0 > 0$) :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, v_{n+1} - v_n \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2n}}$$

b) En sommant les inégalités précédentes, on peut écrire:

$\forall n \geq n_0, \quad \sum\limits_{k=n_0}^{n} (v_{k+1} - v_k) \geq \dfrac{\ell(1-\ell)}{2} \sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{1}{k}$ d'où :

$$\forall n \geq n_0, \quad v_{n+1} - v_{n_0} \geq \frac{\ell(1-\ell)}{2} \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{k}.$$

Or, comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (Riemann), la suite $\left(\sum\limits_{k=n_0}^{n} \dfrac{1}{k}\right)_{n\geq n_0}$ diverge et, comme elle est croissante, tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Par prolongement des inégalités, il suit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$$

c) Comme la suite (v_n) converge, on peut écrire que le résultat précédent est absurde, donc que l'hypothèse $\ell \neq 1$ est fausse. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 1}$$

4) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ et comme $\ell \neq 0$, on a : $v_n \sim 1$ d'où :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021