

Suite homographique

Énoncé

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie (on montrera que ses termes sont tous strictement positifs).

2) Soit f la fonction définie sur $] -4, +\infty[$ par :

$$\forall x \in] -4, +\infty[, f(x) = \frac{5x+3}{x+4}.$$

a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions distinctes α et β ($\alpha > \beta$) sur $] -4, +\infty[$.

b) Étudier les variations de f sur \mathbb{R}^+ .

3) a) Prouver que la suite $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel λ que l'on déterminera.

4) a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1},$$

et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha.$$

b) Retrouver ainsi le résultat de la question 2b.

Correction

1) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ » est vraie.

i) Pour $n=0$. Par définition, u_0 existe et $u_0 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Comme $u_n > 0$, on a donc : $u_n + 4 > 0$ donc u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, on a : $5u_n + 3 > 0$ d'où : $u_{n+1} > 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie donc : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

iii) On peut donc conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et ses termes appartiennent à \mathbb{R}_+^*

2) a) Soit $x \in]-4, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow \frac{5x+3}{x+4} - x = 0 && \text{d'où :} \\ &\Leftrightarrow \frac{5x+3-x^2-4x}{x+4} = 0 && \text{donc :} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0. \end{aligned}$$

Or, l'équation $x^2 - x - 3 = 0$ admet $\Delta = 13$ pour discriminant, ce qui nous permet de conclure :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

$$\text{d'où, comme } \frac{1-\sqrt{13}}{2} > -4 :$$

L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions distinctes dans $] -4, +\infty[$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

Suite homographique

b) f est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme fonction rationnelle définie sur \mathbb{R}^+ , avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) = \frac{5(x+4) - (5x+3)}{(x+4)^2} \quad \text{donc :}$$

$$= \frac{17}{(x+4)^2} \quad \text{d'où :}$$

$$> 0. \quad \text{et donc :}$$

f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ .

3) a) On a, par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de α et de β :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 4} - \frac{5\alpha + 3}{\alpha + 4}}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 4} - \frac{5\beta + 3}{\beta + 4}} \quad \text{donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \times \frac{(\alpha + 4)(5u_n + 3) - (u_n + 4)(5\alpha + 3)}{(\beta + 4)(5u_n + 3) - (u_n + 4)(5\beta + 3)} \quad \text{donc, après simplifications :}$$

$$= \frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \cdot \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}.$$

On peut finalement conclure, comme $\beta \neq \alpha$:

La suite $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\beta + 4}{\alpha + 4}$.

NB : peut être eut-il été judicieux de prouver au préalable (par récurrence) que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \beta$.

b) D'après les cours, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4}\right)^n \cdot \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha + (u_0 - \beta) \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4}\right)^n \cdot \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{donc :}$$

Suite homographe

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \left[1 - \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right)^n \right] = \alpha - \beta \cdot \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right)^n.$$

Comme $\alpha \neq \beta$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right)^n \neq 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\alpha - \beta \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right)^n}{1 - \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right)^n}$$

Or, comme $\beta < \alpha$ et comme $\alpha > -4$, on a : $\left| \frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right| < 1$ d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta + 4}{\alpha + 4} \right)^n = 0 \quad \text{ce qui nous permet de conclure :}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$
--

4) a) i) Pour $n=0$. On a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{\frac{5}{2} + 3}{\frac{1}{2} + 4} = \frac{11}{9}$ d'où : $u_1 \geq u_0$.

Ainsi, la proposition est vraie pour $n=0$.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. f étant croissante sur \mathbb{R}^+ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive, on a donc :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \quad \text{d'où :}$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Ainsi, si la proposition est vraie au rang n , elle l'est au rang $n+1$.

iii) On peut finalement conclure :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
--

Suite homographique

De même on montrerait par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$$

b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée par α , elle converge et, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f est continue sur \mathbb{R}^+ , sa limite ℓ est solution de l'équation $x=f(x)$ donc, d'après le résultat du 2a : $\ell \in \{\alpha, \beta\}$.

De plus, par récurrence, on montrerait que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \beta$ donc, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq u_0 > \beta$ d'où, par prolongement des inégalités :

$\ell \geq u_0 > \beta$ donc :

$$\ell \neq \beta \quad .$$

On peut finalement conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .