Suite homographique

Enoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie (on montrera que ses termes sont tous strictement positifs).

2) Soit f la fonction définie sur $]-4,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]-4,+\infty[,\ f(x) = \frac{5x+3}{x+4}.$$

a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions distinctes α et β $(\alpha > \beta)$ sur $]-4,+\infty[$.

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) Prouver que la suite $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ que l'on déterminera.

4) a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1},$$

et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \alpha.$$

b) Retrouver ainsi le résultat de la question 2b.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ » est vraie.

i) Pour n=0. Par définition, u_0 existe et $u_0 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Comme $u_n > 0$, on a donc : $u_n + 4 > 0$ donc u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, on a : $5u_n + 3 > 0$ d'où : $u_{n+1} > 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie donc : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

iii) On peut donc conclure :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et ses termes appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$

2) a) Soit $x \in]-4, +\infty[$. On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x+3}{x+4} - x = 0 \qquad \text{d'où :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+3-x^2-4x}{x+4} = 0 \qquad \text{donc :}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 .$$

Or, l'équation $x^2 - x - 3 = 0$ admet $\Delta = 13$ pour discriminant, ce qui nous permet de conclure :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

d'où, comme $\frac{1-\sqrt{13}}{2} > -4$:

L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions distinctes dans $]-4, +\infty[$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^+$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \frac{5(x+4)-(5x+3)}{(x+4)^2} \qquad \text{donc :}$$

$$= \frac{17}{(x+4)^2} \qquad \text{d'où :}$$

$$> 0. \qquad \text{et donc :}$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) On a , par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de α et de β :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{\frac{5u_n+3}{u_n+4} - \frac{5\alpha+3}{\alpha+4}}{\frac{5u_n+3}{u_n+4} - \frac{5\beta+3}{\beta+4}} \qquad \text{donc :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{\beta+4}{\alpha+4} \times \frac{(\alpha+4)(5u_n+3)-(u_n+4)(5\alpha+3)}{(\beta+4)(5u_n+3)-(u_n+4)(5\beta+3)} \qquad \text{donc, après simplifications :}$$

$$= \frac{\beta+4}{\alpha+4} \cdot \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}.$$

On peut finalement conclure, comme $\beta \neq \alpha$:

La suite $\left(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\beta+4}{\alpha+4}$.

NB : peut être eut-il été judicieux de prouver au préalable (par récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \beta$.

b) D'après les cours, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = \left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \cdot \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}. \qquad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + (u_n-\beta)\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \cdot \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}. \qquad \text{donc :}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n\left[1-\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n\right]=\alpha-\beta.\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n.$$

Comme $\alpha \neq \beta$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \neq 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\frac{\alpha-\beta\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n}{1-\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n}$$

Or, comme $\beta<\alpha$ et comme $\alpha>-4$, on a : $\left|\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right|<1$ d'où :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n=0$ ce qui nous permet de conclure :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

4) a) i) Pour n=0. On a : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=\frac{\frac{5}{2}+3}{\frac{1}{2}+4}=\frac{11}{9}$ d'où : $u_1 \geq u_0$.

Ainsi, la proposition est vraie pour n=0.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. f étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, on a donc :

$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ d'où :

$u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Ainsi, si la proposition est vraie au rang n, elle l'est au rang n+1.

iii) On peut finalement conclure :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

De même on montrerait par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \alpha}$$

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée par α, elle converge et, comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, sa limite ℓ est solution de l'équation x=f(x) donc, d'après le résultat du 2a : $\ell \in \{\alpha, \beta\}$.

De plus, par récurrence, on montrerait que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \beta$ donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq u_0 > \beta$ d'où, par prolongement des inégalités :

$\ell \geq u_0 > \beta$ donc :

$\ell \neq \beta$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021