

Equivalence de suites

Enoncés

EXERCICE 4

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deux suites positives. Montrer que :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon) v_n.$$

EXERCICE 5

Soient x et y deux réels tels que $0 < |x| < |y|$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x^n + \beta y^n \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels.}$$

1. On suppose que β n'est pas nul, que y est différent de 1 et que :

a. montrer que : $u_n \sim \beta y^n$

b. montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |u_n| > 0$

Donner alors un équivalent de $\ln|u_n|$ quand n est au voisinage de $+\infty$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x , y , α et β pour que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Correction

EXERCICE 4

* Supposons que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

Il existe $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite 1 et $r \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq r, u_n = h_n v_n$$

De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$ par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, 1 - \varepsilon \leq h_n \leq 1 + \varepsilon$$

Et donc, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, (1 - \varepsilon)v_n \leq h_n v_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

En posant $n_0 = \max(n_1, r)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

* Réciproquement, supposons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

Soient alors $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n \quad (1)$$

Soit maintenant $n \geq n_0$. Deux cas se présentent :

- Si $v_n \neq 0$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive : $v_n > 0$. En divisant alors par v_n , on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \leq \frac{u_n}{v_n} \leq (1 + \varepsilon)$$

Soit en posant $h_n = \frac{u_n}{v_n}$:

$$(1 - \varepsilon) \leq h_n \leq (1 + \varepsilon)$$

Equivalence de suites

Et on a : $u_n = h_n v_n$

- Si $v_n = 0$. D'après la relation (1), $u_n = 0$

En posant $h_n = 1$, on a :

$$(1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon) \text{ et } u_n = h_n v_n (=0)$$

Soit alors $(h_n)_{n \geq p}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq p, \begin{cases} h_n = \frac{u_n}{v_n} & \text{si } v_n \neq 0 \\ h_n = 1, & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$$

où p est tel que $\forall n \geq p$ ($u_n = 0 \Leftrightarrow v_n = 0$). D'après les remarques précédentes, on a :

$$\forall n \geq p, (1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon)$$

Et donc, par définition, de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$$

De plus, par construction on a :

$$\forall n \geq p, u_n = h_n v_n$$

Il existe donc une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite 1 et $p \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq p, u_n = h_n v_n$$

Et donc, par définition : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

On peut donc conclure :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$$

EXERCICE 5

1.a. On a comme $\beta \neq 0$ et $y \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \beta y^n \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right)$$

comme $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{y} \right)^n = 0$, et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right) = 1$.

Par définition de l'équivalence :

$$u_n \sim \beta y^n$$

1.b. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |\beta y^n| \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\beta y^n| > 0.$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| > 0.$$

Ainsi :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| > 0$$

Equivalence de suites

D'où :

$$\forall n \geq n_0, \ln|u_n| = \ln|\beta| + n \ln|y| + \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|$$

Et donc, comme y est différent de 1 :

$$\forall n \geq n_0, \frac{\ln|u_n|}{n \ln|y|} = 1 + \frac{\ln|\beta|}{n \ln|y|} + \frac{\ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|}{n \ln|y|}$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln|\beta|}{n \ln|y|} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| = \ln 1 \quad (\text{car } \ln \text{ est continue au } 1).$$

Comme $\ln 1 = 0$, on a comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln|y| = +\infty$ (si $|y| > 1$) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln|y| = -\infty$ (si $|y| < 1$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|}{n \ln|y|} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln|u_n|}{n \ln|y|} = 1$$

D'où :

$$\ln|u_n| \sim n \ln|y|$$

2. Si $\beta \neq 0$ et $|y| > 1$, d'après la question 1.a. : $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta y^n| = +\infty$.

$(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée si $\beta \neq 0$ et si $|y| > 1$.

Equivalence de suites

Si $\beta = 0$ ou si $|y| \leq 1$, $(\beta y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bornée si et seulement si $(\alpha x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc si et seulement si $\alpha = 0$ ou $|x| \leq 1$ (pour des raisons similaires). Comme $|x| < |y|$, si $|y| \leq 1$, on a : $|x| \leq 1$.

Ainsi :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\alpha = \beta = 0$, $\beta = 0$ et $|x| \leq 1$ ou $\beta \neq 0$ et $|y| \leq 1$