

## Equivalence de suites

## Enoncés

**EXERCICE 4**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , deux suites positives. Montrer que :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon) v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon) v_n.$$

**EXERCICE 5**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 < |x| < |y|$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha x^n + \beta y^n$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels.

1. On suppose que  $\beta$  n'est pas nul, que  $y$  est différent de 1 et que :

a. montrer que :  $u_n \sim \beta y^n$

b. montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, |u_n| > 0$

Donner alors un équivalent de  $\ln|u_n|$  quand  $n$  est au voisinage de  $+\infty$ .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  pour que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée.

## Correction

**EXERCICE 4**

\* Supposons que :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

Il existe  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite 1 et  $r \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq r, u_n = h_n v_n$$

De plus, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$  par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, 1 - \varepsilon \leq h_n \leq 1 + \varepsilon$$

Et donc,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant positive :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, (1 - \varepsilon)v_n \leq h_n v_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

En posant  $n_0 = \max(n_1, r)$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

\* Réciproquement, supposons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

Soient alors  $\varepsilon > 0$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq n_0, (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n \quad (1)$$

Soit maintenant  $n \geq n_0$ . Deux cas se présentent :

- Si  $v_n \neq 0$ , alors  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant positive :  $v_n > 0$ . En divisant alors par  $v_n$ , on obtient :

$$(1 - \varepsilon) \leq \frac{u_n}{v_n} \leq (1 + \varepsilon)$$

Soit en posant  $h_n = \frac{u_n}{v_n}$  :

$$(1 - \varepsilon) \leq h_n \leq (1 + \varepsilon)$$

## Equivalence de suites

Et on a :  $u_n = h_n v_n$

- Si  $v_n = 0$ . D'après la relation (1),  $u_n = 0$

En posant  $h_n = 1$ , on a :

$$(1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon) \text{ et } u_n = h_n v_n (=0)$$

Soit alors  $(h_n)_{n \geq p}$  la suite définie par :

$$\forall n \geq p, \begin{cases} h_n = \frac{u_n}{v_n} & \text{si } v_n \neq 0 \\ h_n = 1, & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$$

où  $p$  est tel que  $\forall n \geq p$  ( $u_n = 0 \Leftrightarrow v_n = 0$ ). D'après les remarques précédentes, on a :

$$\forall n \geq p, (1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon)$$

Et donc, par définition, de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = 1$$

De plus, par construction on a :

$$\forall n \geq p, u_n = h_n v_n$$

Il existe donc une suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite 1 et  $p \in \mathbb{N}$  tels que :

$$\forall n \geq p, u_n = h_n v_n$$

Et donc, par définition :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

On peut donc conclure :

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$$

## Equivalence de suites

**EXERCICE 5**

1.a. On a comme  $\beta \neq 0$  et  $y \neq 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \beta y^n \left( \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right)$$

comme  $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{y} \right)^n = 0$ , et donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right) = 1$ .

Par définition de l'équivalence :

$$u_n \sim \beta y^n$$

1.b. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = |\beta y^n| \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\beta y^n| > 0.$$

Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| = 1$  :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| > 0.$$

Ainsi :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| > 0$$

## Equivalence de suites

D'où :

$$\forall n \geq n_0, \ln|u_n| = \ln|\beta| + n \ln|y| + \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|$$

Et donc, comme  $y$  est différent de 1 :

$$\forall n \geq n_0, \frac{\ln|u_n|}{n \ln|y|} = 1 + \frac{\ln|\beta|}{n \ln|y|} + \frac{\ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|}{n \ln|y|}$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln|\beta|}{n \ln|y|} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| = \ln 1 \quad (\text{car } \ln \text{ est continue au } 1).$$

Comme  $\ln 1 = 0$ , on a comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln|y| = +\infty$  (si  $|y| > 1$ ) et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln|y| = -\infty$  (si  $|y| < 1$ ) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \left( \frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|}{n \ln|y|} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln|u_n|}{n \ln|y|} = 1$$

D'où :

$$\ln|u_n| \sim n \ln|y|$$

2. Si  $\beta \neq 0$  et  $|y| > 1$ , d'après la question 1.a. :  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\beta y^n| = +\infty$ .

$(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est donc pas bornée si  $\beta \neq 0$  et si  $|y| > 1$ .

## Equivalence de suites

Si  $\beta = 0$  ou si  $|y| \leq 1$ ,  $(\beta y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors bornée si et seulement si  $(\alpha x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, donc si et seulement si  $\alpha = 0$  ou  $|x| \leq 1$  (pour des raisons similaires). Comme  $|x| < |y|$ , si  $|y| \leq 1$ , on a :  $|x| \leq 1$ .

Ainsi :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée si et seulement si  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\beta = 0$  et  $|x| \leq 1$  ou  $\beta \neq 0$  et  $|y| \leq 1$