Equivalence de suites

Enoncés

EXERCICE 4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites positives. Montrer que :

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n\geq n_0,\ (1 - \varepsilon)\ v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)\ v_n.$

EXERCICE 5

Soient x et y deux réels tels que $0<|x|<|y|$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \alpha x^n + \beta y^n$ où α et β sont deux réels.

1. On suppose que β n'est pas nul, que y est différent de 1 et que :

   a. montrer que : $u_n \sim \beta y^n$

   b. montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |u_n| > 0$

Donner alors un équivalent de $\ln|u_n|$ quand n est au voisinage de $+\infty$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y, α et β pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

EXERCICE 4

* Supposons que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

Il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et $r\in\mathbb{N}$ tels que :

$\forall n\geq r,\ u_n=h_nv_n$

De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n=1$ par définition de la limite :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_1,\ 1-\varepsilon\leq h_n\leq 1+\varepsilon$

Et donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_1,\ (1-\varepsilon)v_n\leq h_nv_n\leq(1+\varepsilon)v_n$

En posant $n_0=\max(n_1,r)$:

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n\leq u_n\leq(1+\varepsilon)v_n$

* Réciproquement, supposons que :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n\leq u_n\leq(1+\varepsilon)v_n$

Soient alors $\varepsilon>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que :

$\forall n\geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n\leq u_n\leq(1+\varepsilon)v_n$ (1)

Soit maintenant $n\geq n_0$. Deux cas se présentent :

- Si $v_n\neq 0$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive : $v_n>0$. En divisant alors par v_n, on obtient :

  $(1-\varepsilon)\leq\dfrac{u_n}{v_n}\leq(1+\varepsilon)$

  Soit en posant $h_n=\dfrac{u_n}{v_n}$:

  $(1-\varepsilon)\leq h_n\leq(1+\varepsilon)$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Et on a : $u_n = h_n v_n$

- Si $v_n = 0$. D'après la relation (1), $u_n = 0$

En posant $h_n = 1$, on a :

$(1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon)$ et $u_n = h_n v_n (=0)$

Soit alors $(h_n)_{n \geq p}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq p, \begin{cases} h_n = \dfrac{u_n}{v_n} & \text{si } v_n \neq 0 \\ h_n = 1, & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$$

où p est tel que $\forall\ n \geq p\ \ (u_n = 0 \Leftrightarrow v_n = 0)$. D'après les remarques précédentes, on a :

$\forall n \geq p,\ (1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon)$

Et donc, par définition, de la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} h_n = 1$$

De plus, par construction on a :

$\forall n \geq p,\ u_n = h_n v_n$

Il existe donc une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite 1 et $p \in \mathbb{N}$ tels que :

$\forall n \geq p,\ u_n = h_n v_n$

Et donc, par définition : $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$

On peut donc conclure :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ (1-\varepsilon) v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon) v_n}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 5

1.a. On a comme $\beta \neq 0$ et $y \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \beta y^n \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right)$$

comme $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{y} \right)^n = 0$, et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right) = 1$.

Par définition de l'équivalence :

$$\boxed{u_n \sim \beta y^n}$$

1.b. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = |\beta y^n| \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\beta y^n| > 0 .$$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| > 0 .$$

Ainsi :

$$\boxed{\exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0,\ |u_n| > 0}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

D'où :

$$\forall\, n \geq n_0,\ \ln|u_n| = \ln|\beta| + n\ln|y| + \ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right|$$

Et donc, comme y est différent de 1 :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{\ln|u_n|}{n\ln|y|} = 1 + \frac{\ln|\beta|}{n\ln|y|} + \frac{\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right|}{n\ln|y|}$$

De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|\beta|}{n\ln|y|} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right| = \ln 1$$ (car ln est continue au 1).

Comme ln1=0, on a comme $\lim_{n\to+\infty} n\ln|y| = +\infty$ (si $|y| > 1$) et $\lim_{n\to+\infty} n\ln|y| = -\infty$ (si $|y| < 1$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right|}{n\ln|y|} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n\ln|y|} = 1$$

D'où :

$$\boxed{\ln|u_n| \sim n\ln|y|}$$

2. Si $\beta \neq 0$ et $|y|>1$, d'après la question 1.a. : $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car $\lim_{n\to+\infty}|\beta y^n| = +\infty$.

$(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée si $\beta \neq 0$ et si $|y|> 1$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Si $\beta = 0$ ou si $|y| \leq 1$, $\left(\beta y^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors bornée si et seulement si $(\alpha x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc si et seulement si $\alpha = 0$ ou $|x| \leq 1$ (pour des raisons similaires).comme $|x| < |y|$, si $|y| \leq 1$, on a : $|x| \leq 1$.

Ainsi :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\alpha = \beta = 0$, $\beta = 0$ et $\lvert x\rvert \leq 1$ ou $\beta \neq 0$ et $\lvert y\rvert \leq 1$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021