

Equivalence de suites

Énoncés

EXERCICE 1

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$

- Déterminer un équivalent de A_n^k lorsque n est au voisinage de $+\infty$.
- En déduire la limite de $A_n^k p^n$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Soient a et b deux réels non nuls. Après avoir prouvé que cette suite est bien définie (à partir d'un certain rang), déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général est défini par :

$$u_n = \frac{\ln \left[\cos \left[\frac{a}{n} \right] \right]}{\ln \left[\cos \left[\frac{b}{n} \right] \right]}$$

EXERCICE 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + n u_n^2}$. On admet que :

$$\forall n \in [2, +\infty[, 0 < u_n \leq \frac{1}{n}.$$

et que :

$$\forall k \in [2, +\infty[, \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = k u_k.$$

Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

EXERCICE 1

a. On a :

$$\forall n \geq k, A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \\ = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

De plus :

$$\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, n-i \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

Donc le produit comportant k termes :

$$A_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k$$

b. Ainsi :

$$A_n^k p^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k p^n$$

Comme $|p| < 1$, on a d'après les croissances comparées : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k p^n = 0$.

Deux suites équivalentes convergentes ayant la même limite, on peut conclure

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^k p^n = 0.$$

EXERCICE 2

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} = 0$ et comme $-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \frac{a}{n} < \frac{\pi}{2} \\ \text{i.e. : } \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{b}{n} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < \cos\left(\frac{a}{n}\right) < 1 \\ \text{et, donc} \\ 0 < \cos\left(\frac{b}{n}\right) < 1 \end{cases}$$

Equivalence de suites

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \begin{cases} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) < 0 \\ \ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right) < 0 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\forall n \geq n_0, u_n = \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right)} \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1\right)\right]}{\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1\right)\right]}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} = 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$, on en déduit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1\right) = 0, \text{ soit à l'aide des équivalents classiques :}$$

- $\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1$, et
- $\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1$

Equivalence de suites

On en déduit alors : $u_n \sim \frac{\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1}{\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1}$. De plus, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n} = 0$, on a, toujours à

l'aide des équivalents classiques :

- $\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1 \sim -\frac{a^2}{2n^2}$, et :

- $\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1 \sim -\frac{b^2}{2n^2}$

On peut maintenant écrire : $u_n \sim \frac{-\frac{a^2}{2n^2}}{-\frac{b^2}{2n^2}}$, soit : $u_n \sim \frac{a^2}{b^2}$, et donc les limites de deux suites

équivalentes admettant une limite étant égales :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{a^2}{b^2}$$

EXERCICE 3

D'après le résultat admis, on a :

$\forall k \in [2, +\infty[$, $\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \leq 1$ donc, en sommant ces inégalités de $k=2$ à $k=n-1$ ($n \in [3, +\infty[$), la somme comportant $n-2$ termes :

$$\forall n \in [3, +\infty[, \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \leq n-2 \quad \text{soit encore :}$$

$$\forall n \in [3, +\infty[, \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_2} \leq n-2 \quad \text{et donc}$$

$$\forall n \in [3, +\infty[, \frac{1}{n-2 + \frac{1}{u_2}} \leq u_n \quad \text{d'où}$$

Equivalence de suites

$$\forall n \in [3, +\infty[, \frac{1}{n-2 + \frac{1}{u_2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{donc, en multipliant ce résultat par } n \geq 0 :$$

$$\forall n \in [3, +\infty[, \frac{n}{n-2 + \frac{1}{u_2}} \leq nu_n \leq 1$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-2 + \frac{1}{u_2}} = 1$, on peut alors écrire, d'après le théorème d'existence d'une limite

par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$ soit finalement :

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$