Equivalence de suites

Enoncés

EXERCICE 1

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$

a. Déterminer un équivalent de A_n^k lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

b. En déduire la limite de $A_n^k\, p^n$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Soient a et b deux réels non nuls. Après avoir prouvé que cette suite est bien définie (à partir d'un certain rang), déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général est défini par :

$$u_n = \frac{\ln\left[\cos\left[\frac{a}{n}\right]\right]}{\ln\left[\cos\left[\frac{b}{n}\right]\right]}$$

EXERCICE 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + n\, {u_n}^2}$. On admet que :

$$\forall\, n\in[2,+\infty[,\ 0<u_n\le\frac{1}{n}.$$

et que :

$$\forall\, k\in[2,+\infty[,\ \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = k u_k.$$

Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

EXERCICE 1

a. On a :

$$\forall\, n \geq k,\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$= n\,(n-1)\ \ldots\ (n-k+1).$$

De plus :

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ n - i \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Donc le produit comportant k termes :

$$\boxed{A_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k}$$

b. Ainsi :

$$A_n^k p^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k p^n$$

Comme $|p| < 1$, on a d'après les croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k p^n = 0$.

Deux suites équivalentes convergentes ayant la même limite, on peut conclure

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n^k\, p^n = 0.}$$

EXERCICE 2

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b}{n} = 0$ et comme $-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \frac{a}{n} < \frac{\pi}{2} \\ \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{b}{n} < \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad \text{i.e. : } \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \left\{\begin{array}{l} 0 < \cos\left(\frac{a}{n}\right) < 1 \\ \qquad \text{et, donc} \\ 0 < \cos\left(\frac{b}{n}\right) < 1 \end{array}\right.$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\quad \begin{cases} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) < 0 \\ \\ \ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) < 0 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right)}$$ soit :

$$= \frac{\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1\right)\right]}{\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1\right)\right]}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b}{n} = 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0$, on en déduit alors :

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1\right) = 0$, soit à l'aide des équivalents classiques :

- $\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{a}{n}\right) - 1$, et
- $\ln\left[1 + \left(\cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{b}{n}\right) - 1$

On en déduit alors : $u_n \sim \dfrac{\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1}{\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1}$. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b}{n}=0$, on a, toujours à l'aide des équivalents classiques :

- $\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1 \sim -\dfrac{a^2}{2n^2}$, et :
- $\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1 \sim -\dfrac{b^2}{2n^2}$

On peut maintenant écrire : $u_n \sim \dfrac{-\frac{a^2}{2n^2}}{-\frac{b^2}{2n^2}}$, soit : $u_n \sim \dfrac{a^2}{b^2}$, et donc les limites de deux suites équivalentes admettant une limite étant égales :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a^2}{b^2}}$$

EXERCICE 3

D 'après le résultat admis, on a :

$\forall k\in[2,+\infty[, \dfrac{1}{u_{k+1}}-\dfrac{1}{u_k}\leq 1$ donc, en sommant ces inégalités de k=2 à k=n-1($n\in[3,+\infty[$), la somme comportant n-2 termes :

$\forall n\in[3,+\infty[, \sum\limits_{k=2}^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_{k+1}}-\dfrac{1}{u_k}\right)\leq n-2$ soit encore :

$\forall n\in[3,+\infty[, \dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_2}\leq n-2$ et donc

$\forall n\in[3,+\infty[, \dfrac{1}{n-2+\frac{1}{u_2}}\leq u_n$ d'où

Equivalence de suites

$\forall n \in [3,+\infty[, \dfrac{1}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ donc, en multipliant ce résultat par $n \geq 0$:

$$\forall n \in [3,+\infty[, \frac{n}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} \leq n u_n \leq 1$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} = 1$, on peut alors écrire, d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = 1$ soit finalement :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE