Equivalence de suites

Méthodes

Montrer que deux suites réelles sont équivalentes

1. *En cherchant la limite du quotient*

Se souvenir que, si les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous nuls à partir d'un certain rang, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si, et seulement si, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

2. *Utiliser la définition de l'équivalence*

Si la première méthode n'est pas applicable ou si elle n'aboutit pas (ce qui est assez rare aux concours), on peut également utiliser la définition de l'équivalence : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, et on note : $u_n \sim v_n$, s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite 1 et un rang r tels que : $\forall\, n \geq r,\ u_n = h_n v_n$.

Propriétés des suites réelles équivalentes

1. *Limites*

Deux suites équivalentes admettant une limite (finie ou infinie) tendent vers la même limite.

2. *Propriétés d'une suite de limite non nulle*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$.

3. *Signe*

Deux suites équivalentes sont de même signe au voisinage de $+\infty$.

4. *Opérations sur les équivalents*

Dans le cas général, on peut multiplier et diviser (si les suites ne s'annulent pas au voisinage de $+\infty$) les équivalences. En revanche, on ne peut pas dans le cas général additionner ou composer des équivalents.

5. *Equivalents usuels*

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a :

- $\sin(u_n) \sim u_n$,
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^{\,2}}{2}$,
- $\tan(u_n) \sim u_n$,
- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$,
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$,
- $(1 + u_n)^{\alpha} - 1 \sim \alpha u_n$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
- Si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$ (avec $a_p \neq 0$), alors $P(n) \sim a_p n^p$