Monotonie et nature

Enoncés

EXERCICE 1

Dans cet exercice, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n\leq 3+\frac{7}{n}\ (1)$$

a) Prouver que si elle est croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner un majorant de sa limite.

b) On suppose que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n\geq 3-\frac{(-1)^n}{n}.(2)$

Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0\in\mathbb{R}$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=\frac{w_n^2+1}{2}$$

1) Prouver que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

2) Préciser, selon la valeur de w_0, la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 3

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n\geq 2,\ U_n = \left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{3n^2}$$

Déterminer la limite de $(U_n)_{n\geq 2}$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

EXERCICE 1

a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{7}{n} \leq 7$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n \leq 10$

Ainsi, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (1), on obtient alors, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{7}{n} = 0$:

$$\boxed{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge, et sa limite est inférieure ou égale à } 3.}$$

b) D'après (1) et (2), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3 - \frac{(-1)^n}{n} \leq U_n \leq 3 + \frac{7}{n}$

Comme $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[3 - \left(\frac{-1}{n}\right)^n\right] = 3$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[3 + \frac{7}{n}\right] = 3$, on peut alors écrire, d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement :

$$\boxed{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 2

1) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{w_n^{\,2}+1}{2} - w_n$$ soit encore :

$$= \frac{w_n^{\,2}+1-2w_n}{2}$$ d'où :

$$= \frac{(w_n-1)^2}{2}$$ et donc :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}-w_n\geq 0$.

Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ce qui nous permet de conclure :

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$. On a alors :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$, si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell=f(\ell)$. Or on a :

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell^2+1}{2}$$ soit encore :

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2+1}{2} - \ell = 0$$ d'où

$$\Leftrightarrow \frac{(\ell-1)^2}{2} = 0$$ soit finalement :

$$\Leftrightarrow \ell = 1.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers 1. Etudions alors les variations de f sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, et on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=x$.

On peut alors dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Deux cas se présentent alors :

- Si $w_0\in[-1,1]$. Comme $f([-1,1]) \subset [-1,1]$, on obtient alors, par récurrence :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n\in[-1,1]$.

Dans ce cas, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée, donc convergente et, d'après le résultat précédent, converge vers 1,

- Si $w_0\notin[-1,1]$. Comme : $\forall x\in\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, $f(x)\in]1,+\infty[$, on prouve alors, en raisonnant par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n\in]1,+\infty[$.

Etant croissante et comme $w_1>1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers 1 (contraposée du théorème de prolongement des inégalités), ce qui nous permet d'écrire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle admet une limite et comme ses termes (à l'exception éventuelle de w_0) sont positifs, elle diverge donc vers $+\infty$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On peut finalement conclure :

Si $w_0 \in [-1,1]$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1

Si $w_0 \notin [-1,1]$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

N.B. : En supposant la convergence de la suite w, on pouvait également passer à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = \frac{w_n^{\,2}+1}{2}$ pour montrer qu'elle ne peut converger que vers 1.

EXERCICE 3

On a :

$\forall n \geq 2,\ 1 - \frac{2}{n^2} > 0$

Et donc :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \exp\left[3n^2 \ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-6.\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}}\right].$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{n^2}\right) = 0$,

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}}\right) = 1$

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-6\frac{\ln\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}}\right] = -6$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

exp étant continue en −6, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-6}}$$

N.B. : On pouvait également déterminer un équivalent de $3n^2 \ln\left(1-\frac{2}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ pour déterminer sa limite −6.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021