Monotonie et nature

Enoncés

EXERCICE 1

Dans cet exercice, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n\leq 3+\frac{7}{n}\ (1)$$

a) Prouver que si elle est croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner un majorant de sa limite.

b) On suppose que :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n\geq 3-\frac{(-1)^n}{n}.(2)$

Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0\in\mathbb{R}$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=\frac{w_n^2+1}{2}$$

1) Prouver que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

2) Préciser, selon la valeur de w_0, la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

EXERCICE 3

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n\geq 2,\ U_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{3n^2}$$

Déterminer la limite de $(U_n)_{n\geq 2}$.

Correction

EXERCICE 1

a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{7}{n} \leq 7$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n \leq 10$

Ainsi, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (1), on obtient alors, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est inférieure ou égale à 3.

b) D'après (1) et (2), on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 3 - \frac{(-1)^n}{n} \leq U_n \leq 3 + \frac{7}{n}$

Comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[3 - \left(\frac{-1}{n}\right)^n\right] = 3$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[3 + \frac{7}{n}\right] = 3$, on peut alors écrire, d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

EXERCICE 2

1) On a :

$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \dfrac{w_n^2+1}{2} - w_n$ soit encore :

$= \dfrac{w_n^2+1-2w_n}{2}$ d'où :

$= \dfrac{(w_n-1)^2}{2}$ et donc :

$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}-w_n \geq 0.$

Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, ce qui nous permet de conclure :

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2}$. On a alors :

$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1} = f(w_n).$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, si la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell=f(\ell)$. Or on a :

$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$ soit encore :

$\Leftrightarrow \dfrac{\ell^2+1}{2} - \ell = 0$ d'où

$\Leftrightarrow \dfrac{(\ell-1)^2}{2} = 0$ soit finalement :

$\Leftrightarrow \ell = 1.$

Ainsi, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers 1. Etudions alors les variations de f sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, et on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=x$.

On peut alors dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Deux cas se présentent alors :

- Si $w_0\in[-1,1]$. Comme $f([-1,1]) \subset [-1,1]$, on obtient alors, par récurrence :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n\in[-1,1]$.

Dans ce cas, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée, donc convergente et, d'après le résultat précédent, converge vers 1,

- Si $w_0\notin[-1,1]$. Comme : $\forall x\in\mathbb{R}\backslash[-1,1]$, $f(x)\in]1,+\infty[$, on prouve alors, en raisonnant par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n\in]1,+\infty[$.

Etant croissante et comme $w_1>1$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers 1 (contraposée du théorème de prolongement des inégalités), ce qui nous permet d'écrire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle admet une limite et comme ses termes (à l'exception éventuelle de w_0) sont positifs, elle diverge donc vers $+\infty$.

On peut finalement conclure :

Si $w_0 \in [-1,1]$, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1

Si $w_0 \notin [-1,1]$, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

N.B. : En supposant la convergence de la suite w, on pouvait également passer à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = \dfrac{w_n^2 + 1}{2}$ pour montrer qu'elle ne peut converger que vers 1.

EXERCICE 3

On a :

$\forall n \geq 2,\ 1 - \dfrac{2}{n^2} > 0$

Et donc :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \exp\left[3n^2 \ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)\right] = \exp\left[-6 . \frac{\ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}}\right].$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{-2}{n^2}\right) = 0$,

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}}\right) = 1$

Et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-6 \dfrac{\ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{-\frac{2}{n^2}}\right] = -6$

exp étant continue en −6, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{-6}}$$

N.B. : On pouvait également déterminer un équivalent de $3n^2\ln\left(1-\dfrac{2}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ pour déterminer sa limite −6.