Monotonie et nature

Enoncés

1/ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} u_k \end{cases}$$

a)Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1$$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2/ Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = 5+12v_n^{10}+v_n \end{cases}$$

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\alpha$ où α désigne un réel non nul. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1/ a) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1$

- Au rang n=1 Comme $u_1=2$, la proposition est vérifiée.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k>1$

Par multiplication d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut alors écrire :

$\prod_{k=1}^{n} u_k > 1$ d'où :

$u_{n+1}>1$

Ainsi, si la proposition est vérifiée jusqu'au rang n, elle l'est également au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1}$$

b) Comme : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\prod_{k=1}^{n} u_k}{u_n}$ donc :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\prod_{k=1}^{n-1} u_k$ d'où :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1.$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs et comme $u_2=u_1$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$$

2/ On a :

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-v_n = 12\,v_n^{10} + 5$ donc, comme $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n^{10}\geq 0$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ d'où :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

3) Supposons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle ℓ Dans ce cas, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ d'où :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_{n+1} - u_n\right) = 0$

Comme $\alpha \neq 0$, il y a donc contradiction, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$$