

## Monotonie et nature

## Enoncés

1/ Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \prod_{k=1}^n u_k \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$$

b) Etudier la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

2/ Etudier la monotonie de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 + 12v_n^{10} + v_n \end{cases}$$

3) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite telle que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \alpha$  où  $\alpha$  désigne un réel non nul. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## Correction

1/ a) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$

- Au rang  $n=1$  Comme  $u_1=2$ , la proposition est vérifiée.
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k > 1$

Par multiplication d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut alors écrire :

$$\prod_{k=1}^n u_k > 1 \text{ d'où :}$$

$$u_{n+1} > 1$$

Ainsi, si la proposition est vérifiée jusqu'au rang  $n$ , elle l'est également au rang  $n+1$ .

- On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$$

b) Comme :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ , on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^n u_k}{u_n} \text{ donc :}$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=1}^{n-1} u_k \text{ d'où :}$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant à termes strictement positifs et comme  $u_2 = u_1$ , on peut finalement conclure :

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante

2/ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = 12 v_n^{10} + 5 \text{ donc, comme } \forall n \in \mathbb{N}, v_n^{10} \geq 0 :$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \geq 0$  d'où :

La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

3) Supposons que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite réelle  $\ell$ . Dans ce cas, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Comme  $\alpha \neq 0$ , il y a donc contradiction, et l'on peut donc conclure :

La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.