Monotonie et nature

Enoncés

1/ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} u_k \end{cases}$$

a)Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1$$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2/ Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = 5+12v_n^{10}+v_n \end{cases}$$

3) a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\alpha$ où α désigne un réel non nul. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α ($\alpha\neq1$). Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang. En déduire sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1/ a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 1$

- Au rang n=1 Comme $u_1 = 2$, la proposition est vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k > 1$

Par multiplication d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut alors écrire :

$\prod_{k=1}^{n} u_k > 1$ d'où :

$u_{n+1} > 1$

Ainsi, si la proposition est vérifiée jusqu'au rang n, elle l'est également au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 1}$$

b) Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\prod_{k=1}^{n} u_k}{u_n}$ donc :

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![\ ,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=1}^{n-1} u_k$ d'où :

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![\ ,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs et comme $u_2 = u_1$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$$

2/ On a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = 12\, v_n^{10} + 5$ donc, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n^{10} \geq 0$:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ d'où :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

3/ a) Supposons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle ℓ Dans ce cas, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Comme $\alpha\neq 0$, il y a donc contradiction, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$$

b) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes strictement positifs, il en est de même de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc d'après le théorème de prolongement des inégalités, on a : $\alpha\geq 0$.

Deux cas se présentent alors :

- Si $\alpha\in[0,1[$. Dans ce cas, on peut écrire, en conséquence de la définition de la limite :

$\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ d'où, comme $\forall n\geq n_0$, $u_n>0$:

$\forall n\geq n_0$, $u_{n+1}\leq u_n$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. Etant positive, elle converge donc vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.

Supposons que $\ell\neq 0$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}}{\lim_{n\to+\infty} u_n} \quad \text{donc :}$$

$$= \frac{\ell}{\ell} \quad \text{i.e. :}$$

$= 1$

Comme $\alpha \neq 1$, il y a donc contradiction, ce qui nous permet d'écrire $\ell = 0$.

- Si $\alpha \in]1, +\infty[$. Dans ce cas, on peut écrire, en conséquence de la définition de la limite :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc comme $\forall n \geq n_0, u_n > 0$:

$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$

Ainsi la suite $(U_n)_{n_{\in\mathbb{N}}}$ est croissante à partir d'un certain rang et admet donc une limite, finie ou infinie (et dans ce cas celle-ci est $+\infty$).

Or de même que précédemment, la suite $(U_n)_{n_{\in\mathbb{N}}}$ ne peut converger que vers 0 ce qui, cette suite étant croissante et avec $u_0 > 0$, est impossible et nous permet donc d'écrire qu'elle diverge vers $+\infty$.

On peut finalement conclure :

La suite $(U_n)_{n_{\in\mathbb{N}}}$ est décroissante (resp. croissante) à partir d'un certain rang si $\alpha \in]0,1[$ (resp. si $\alpha \in]1, +\infty[$) et converge (resp. diverge) vers 0 (resp. $+\infty$)