

Terme général d'une suite

Énoncé

1/ Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

2/ Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 3w_n + 2 \end{cases}$$

Correction

1/ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est (E) : $x^2 - x - 1 = 0$.

(E) admettant $\Delta = 1 + 4 = 5$ pour discriminant, elle admet deux solutions distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

En considérant u_0 et u_1 , on peut alors écrire que α et β sont solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

Or, on a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \beta \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Terme général d'une suite

On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

2/ La suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. L'équation $x=3x+2$ admettant $x=-1$ pour unique solution, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = (\omega_0 + 1) \cdot 3^n - 1$$

soit finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_n = 2 \cdot 3^n - 1$$