Terme général d'une suite

Enoncé

1/ Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

2/ Déterminer le terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1} = 3w_n + 2 \end{cases}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1/ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est (E) : $x^2-x-1 = 0$.

(E) admettant $\Delta = 1+4=5$ pour discriminant, elle admet deux solutions distinctes, qui sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On peut donc écrire qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

En considérant u_0 et u_1, on peut alors écrire que α et β sont solutions du système :

$$(S) : \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Or, on a :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

2/ La suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. L'équation x=3x+2 admettant x=-1 pour unique solution, on peut alors conclure :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\omega_n = (\omega_0+1).3^n-1$

soit finalement :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \omega_n=2.3^n-1$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021