



ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option économique

Aucun document n'est autorisé
L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (\alpha + k)}$$

1. Étude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$

a. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on en déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?

On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$.

b. On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$$

c. Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n + \alpha}$$

b. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt$$

a. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.

b. Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties :

$$\int_0^x e^{-\alpha t} (1 - e^{-t})^n dt$$

et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha + 1)$, pour tout n entier naturel non nul.

c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$$

4. On suppose désormais que $\alpha > 1$.

a. Montrer que, pour tout N entier naturel :

$$\sum_{n=0}^N I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

b. En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

EXERCICE 2

$M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

$M_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à trois lignes dont les coefficients sont réels.

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x , y et z sont des nombres réels.

On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N} & X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$$

1. Montrer que 0 , $\frac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de A , et préciser des vecteurs propres u , v et w qui leur sont respectivement associés.

2. Justifier les affirmations suivantes :

- Il existe un unique triplet (α, β, γ) de \mathbb{R}^3 tel que :

$$B = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

- Pour tout entier naturel n , il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de \mathbb{R}^3 tel que :

$$X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$$

3. Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On dit que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si les suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Dans ce cas on écrit :

$$\lim X_n = \begin{pmatrix} \lim a_n \\ \lim b_n \\ \lim c_n \end{pmatrix}$$

- a. Prouver que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si le réel γ (introduit en 2.2) est nul.
- b. En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$3x - 4y + 12z = 0$$

5. On dit que le couple (A, B) admet une position d'équilibre stable si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite quelle que soit la valeur de X_0 . Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de B , le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable.

3. PROBLÈME

Dans tout le problème (qui comporte *deux parties indépendantes*), on suppose que la durée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique, est une variable aléatoire réelle D qui suit la loi exponentielle de paramètre α .

1. Comparaison de deux tarifications

Pour ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifications T_1 et T_2 , exprimées en francs, définies de la façon suivante :

- $T_1 = aD$, où a est un nombre réel strictement supérieur à 1, qui représente le prix d'une minute de communication ;
- T_2 est à valeurs dans \mathbb{N}^* et, pour tout n entier naturel non nul :

$$\{T_2 = n\} = \{n - 1 < D \leq n\}$$

1. Calculer $E(T_1)$ en fonction de a et de α .
2. Déterminer la loi de T_2 . De quelle loi s'agit-il ? Exprimer $E(T_2)$ en fonction de α .
3. On pose :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^{++} & \varphi(t) = \frac{t}{1 - e^{-t}} \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

- a. Montrer que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.
- b. On définit, de plus, la fonction ψ sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \psi(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$$

Utiliser cette fonction pour en déduire que φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

1. Comparaison des tarifications

- a. Montrer qu'il existe un unique réel α_0 strictement positif tel que $\varphi(\alpha_0) = a$.
- b. Préciser quelle est, en moyenne, la tarification la plus avantageuse suivant la valeur de la durée moyenne d'une communication.

Pour $a = 1,25$ donner, en utilisant votre calculatrice, une valeur approchée de $\frac{1}{\alpha_0}$ (on ne donnera que les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

3.2. Étude d'un standard téléphonique

Dans toute cette partie, θ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant θ inclus.

3.2.1. Cas d'une seule communication

On désigne par n un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle I_n telle que :

$$\begin{cases} I_n(\Omega) = \left\{ \frac{\theta}{n}, \frac{2\theta}{n}, \dots, \frac{(n-1)\theta}{n}, \theta \right\} \\ \forall k \in [1, n]_{\mathbb{N}} \quad P\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

où P désigne la probabilité. De plus, I_n et D (la durée aléatoire de la communication), sont indépendantes.

1. Pour tout réel positif t , rappeler quelle est l'expression de $P(D > t)$ en fonction de t et de α .
2. En déduire, pour k élément de $[1, n]_{\mathbb{N}}$, la probabilité conditionnelle de $\{D + I_n > \theta\}$ sachant $\left\{I_n = \frac{k\theta}{n}\right\}$.
3. Démontrer l'égalité suivante :

$$P(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}} \right)$$

4. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(D + I_n > \theta)$$

2.2. Étude de l'encombrement du standard à l'instant θ

Dans cette partie on définit les nombres réels p et q par :

$$p = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \quad \text{et} \quad q = 1 - p$$

On suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ se poursuive au-delà de l'instant θ est égale à p .

On note N_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ et l'on suppose que N_θ suit une loi de Poisson de paramètre θ .

On note C_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans l'intervalle de temps $[0, \theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant θ .

Les instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendants.

.. *Loi de probabilité de C_θ*

- Soit r un entier naturel. Quelle est la loi conditionnelle de C_θ sachant que $\{N_\theta = r\}$?
- Démontrer que l'on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [0, r]_{\mathbb{N}} \quad P\{\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\} = \frac{e^{-\theta} (p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}$$

- En déduire, pour tout entier naturel k , une expression simple de $P(C_\theta = k)$ en fonction de k , p et θ . Quelle est la loi de probabilité de C_θ ?

Étude de l'espérance de C_θ

- Déterminer l'expression de $E(C_\theta)$ en fonction de θ et de α .
- Quelle est la limite de $E(C_\theta)$ lorsque θ tend vers $+\infty$? Vérifier qu'elle majore $E(C_\theta)$.

Exercice 1

Exercice 1

1) a) * Comme $\ell(x)$ est strictement positif, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) > 0$. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \prod_{k=0}^n \frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+k}{k+1}} \quad \text{donc :}$$

$$= \frac{n+1}{n+1+\ell(x)} \quad \text{d'où, comme } \ell(x) > 0 :$$

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} < 1.$$

La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive, on peut donc conclure :

La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

* La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0), on peut également conclure :

La suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

* On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (u_k(a) - u_{k+1}(a)) = u_0(a) - u_{n+1}(a), \text{ les termes s'annulent deux à deux.}$$

Comme la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on peut donc écrire que la suite $\sum_{k=0}^n (u_k(a) - u_{k+1}(a))$ converge, et l'on peut donc conclure :

La série de terme général $u_n(x) - u_{n+1}(x)$ converge

b) Supposons que $\ell(x)$ soit non nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) - u_{n+1}(x) = u_n(x) \left(1 - \frac{n+1}{n+1+\ell(x)} \right) \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{u_n(x)}{n+1+\ell(x)}.$$

Exercice 1

Ainsi, on a : $u_n(x) - u_{n+1}(x) \sim \frac{u_n(x)}{n}$. De plus, comme $\ell(x) > 0$, on a : $u_n(x) \sim \ell(x)$, et l'on peut conclure :

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) \sim \frac{\ell(x)}{n}$$

c) Comme $\ell(x) > 0$ et $\ell'(x) > 0$, la série de terme général $\frac{\ell(x)}{n}$ est divergente. D'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, on peut alors écrire, d'après le résultat de la question précédente, que la série de terme général $u_n(x) - u_{n+1}(x)$ diverge. Il y a donc contradiction avec le résultat de la question 1a. On peut donc conclure :

$$\ell(x) = 0$$

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \frac{n!}{n^{k+1}}$$

soit encore :

$$= \frac{1}{n^{k+1}}$$

soit finalement, comme $x \in]0,1[: k \in \mathbb{N}, \frac{k+1}{k+1} = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \frac{1}{n^{k+1}}$$

b) Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{k+1}}$ diverge, on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs :

$$\text{La série de terme général } u_n(x) \text{ diverge}$$

3) a) * Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto e^{-t}(1 - e^{-t})^n$ est continue sur \mathbb{R}^+ . De plus, on a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-xt}(1 - e^{-t})^n = 0$ (croissances comparées). Par définition de la limite, on peut donc écrire, cette fonction étant positive sur \mathbb{R}^+ :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists t_0, 0 < t < t_0, t^2 e^{-t}(1 - e^{-t})^n < 1 \quad \text{donc, comme : } t < t_0, t^2 > 0 :$$

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \exists t_0, 0 < t < t_0, e^{-t}(1 - e^{-t})^n < \frac{1}{t^2}.$$

Exercice 1

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^n dt$ converge. On peut alors conclure :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale définissant $I_n(x)$ converge

* On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x e^{-t} dt = \frac{-e^{-t}}{-1} \Big|_0^x \quad \text{soit :}$$

$$= \frac{1}{1} (1 - e^{-x}).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ (car $x > 0$), on en déduit alors, par passage à la limite, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \frac{1}{1}$, et donc que :

$$I_0(x) = \frac{1}{1}$$

b) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto -\frac{e^{-t}}{-1}$ et $t \mapsto (1 - e^{-t})^n$ étant de classe C^1 sur $[0, x]$ ($x > 0$), on obtient, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre la fonction $t \mapsto -\frac{e^{-t}}{-1}$ et on dérive la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})^n$) :

$$\int_0^x e^{-t}(1 - e^{-t})^n dt = -\frac{e^{-t}(1 - e^{-t})^n}{-1} \Big|_0^x + n \int_0^x e^{-t} e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} dt \quad \text{d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^x e^{-t}(1 - e^{-t})^n dt = -\frac{e^{-x}(1 - e^{-x})^n}{-1} + n \int_0^x e^{-t} e^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} dt$$

* On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}(1 - e^{-x})^n}{-1} = 0$, et d'après la question 3a, pour $n \in \mathbb{N}$ et x strictement positif, $I_n(x)$ existe donc, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(x) = \frac{n}{1} I_{n-1}(x + 1)$$

Exercice 1

c) On a :

$$n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} x^k \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{n!}{n!} x^n + \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!} x^k \quad \text{soit encore, en effectuant le changement d'indice } k'=k-1 :$$

$$= \frac{n!}{n!} x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^{k+1} \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{n!}{n!} x^n + x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^k = \frac{n!}{n!} x^n + x u_{n-1}(x).$$

Les suites $(I_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence. Comme $u_0(x) = I_0(x)$, on peut donc conclure :

$$\boxed{n \in \mathbb{N}, I_n(x) = u_n(x)}$$

4) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n(x) = \int_0^x e^{-t} (1 - e^{-t})^n dt \quad \text{donc, par linéarité de l'intégration, les intégrales}$$

en présence étant convergentes :

$$= \int_0^x e^{-t} \sum_{n=0}^N (1 - e^{-t})^n dt \quad \text{d'où, en reconnaissant la somme des termes d'une}$$

suite géométrique de raison $1 - e^{-t} \neq 1$ ($t > 0$) :

$$= \int_0^x e^{-t} \frac{1 - (1 - e^{-t})^{N+1}}{e^{-t} - 1} dt \quad \text{soit encore :}$$

$$= \int_0^x e^{-(-1)t} - e^{-t} (1 - e^{-t})^{N+1} dt \quad \text{donc, par linéarité de l'intégration, les}$$

intégrales en présence étant convergentes ($x > 1$) :

$$= \int_0^x e^{-(-1)t} dt - \int_0^x e^{-t} (1 - e^{-t})^{N+1} dt \quad \text{soit finalement :}$$

$$= I_0(x-1) - I_{N+1}(x-1).$$

Exercice 1

D'après le résultat de la question 3a, on peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n I_k(x) = \frac{1}{x+1} - I_{n+1}(x)$$

b) D'après le résultat de la question 3c, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k(x) = \frac{1}{x+1} - u_{n+1}(x)$$

Comme d'après la question 1.c, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut donc écrire que la suite $\sum_{k=0}^n u_k(x)$ converge vers $\frac{1}{x+1}$, et l'on peut donc conclure :

$$\text{La série de terme général } u_n(x) \text{ converge, de somme } \frac{1}{x+1}$$

Exercice 2

Exercice 2

1) * 0 est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$. Or, on a :

$$AX = 0 \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{matrix} X = 0 \quad \text{donc } (L_2 \quad 2L_2 - 3L_1, L_3 \quad 2L_3 - L_1) :$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{matrix} X = 0 \quad \text{soit encore } (L_3 \quad 2L_3 - L_2) :$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} X = 0 \quad \text{d'où, en posant } X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} :$$

$$\begin{matrix} x + 2z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \end{matrix} \quad \text{et donc :}$$

$$X \text{ Vect } \begin{matrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} .$$

On peut donc conclure :

0 est valeur propre de A, de sous-espace propre associé $E_0 = \text{Vect}(u)$ avec $u = \begin{matrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$

* $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $A - \frac{1}{2}I X = 0$. Or, on a :

$$A - \frac{1}{2}I X = 0 \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{matrix} X = 0 \quad \text{donc } (L_2 \quad 2L_2 - 6L_1, L_3 \quad L_3 - L_1) :$$

Exercice 2

$$A - \frac{1}{2}I \quad X = 0 \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \text{d'où, en posant } X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} :$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ -5y = 0 \end{matrix} \quad \text{et donc :}$$

$$X \text{ Vect} \begin{matrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} .$$

On peut donc conclure :

$\frac{1}{2}$ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé $E_{1/2} = \text{Vect}(v)$ avec $v = \begin{matrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$
--

* 1 est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $(A - I)X = 0$. Or, on a :

$$(A - I)X = 0 \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{matrix} X = 0 \quad \text{donc } (L_3 \quad 6L_3 - 2L_2) :$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix} X = 0 \quad \text{d'où, en posant } X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} :$$

$$\begin{matrix} z = 0 \\ \frac{3}{2}x - 3y + 6z = 0 \end{matrix} \quad \text{et donc :}$$

$$X \text{ Vect} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} .$$

On peut donc conclure :

1 est valeur propre de A, de sous-espace propre associé $E_1 = \text{Vect}(w)$ avec $w = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

Exercice 2

2) * u, v et w étant des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est libre. Comme elle comporte trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, elle forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme B $\in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut donc conclure :

Il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tel que $B = \alpha u + \beta v + \gamma w$

* De même, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut conclure :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de réels tel que $X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \frac{1}{2} (\alpha_{n-1} - \beta_n) + 2$.
 $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_n$

• Au rang $n = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
 X_1 &= AX_0 + B && \text{donc :} \\
 &= A(\alpha_0 u + \beta_0 v + \gamma_0 w) + \alpha u + \beta v + \gamma w && \text{soit encore :} \\
 &= \alpha_0 Au + \beta_0 Av + \gamma_0 Aw + \alpha u + \beta v + \gamma w && \text{donc, par définition de u, v, w :} \\
 &= \alpha u + \frac{1}{2} (\alpha_0 - 2\beta_0) + 2\beta_0 v + (\alpha_0 + \beta_0) w && \text{donc, par unicité des coefficients } (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) : \\
 \alpha_1 &= \alpha_0 + \beta_1 \\
 \alpha_1 &= \frac{1}{2} (\alpha_0 - \beta_1) + 2 . \\
 \alpha_1 &= \alpha_0 + \beta_1
 \end{aligned}$$

La propriété est donc bien vérifiée au rang $n = 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\alpha_n = \frac{1}{2} (\alpha_{n-1} - \beta_n) + 2$. On a :
 $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \beta_n$

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= AX_n + B && \text{donc d'après la question 2. :} \\
 &= A(\alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w) + \alpha u + \beta v + \gamma w && \text{soit encore :}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

$$X_{n+1} = {}_n A u + {}_n A v + {}_n A w + u + v + w \quad \text{donc, par définition de } u, v, w :$$

$$= u + \frac{1}{2} ({}_n + 1) v + ({}_n + 1) w \quad \text{donc, par unicité des coefficients}$$

$$({}_{n+1}, {}_{n+1}, {}_{n+1}) :$$

$${}_{n+1} =$$

$${}_{n+1} = \frac{1}{2} ({}_n + 1)$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$${}_{n+1} = {}_n + 1$$

$${}_{n+1} =$$

$${}_{n+1} = \frac{1}{2} ({}_n + 1) + 2$$

$${}_{n+1} = {}_n + 1$$

Si la propriété est vérifiée au rang n , elle l'est donc également au rang $n + 1$.

• On peut finalement conclure :

$$\begin{aligned}
 & {}_n = \\
 & {}_n \in \mathbb{N}^*, \quad {}_n = \frac{1}{2} ({}_n + 1) + 2 \\
 & {}_n = {}_n + 1
 \end{aligned}$$

4) a) (u, v, w) étant une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A , on peut écrire, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (u, v, w) :

$$\begin{aligned}
 & {}_n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc, comme } P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_n \\ {}_n \\ {}_n \end{pmatrix} \quad \text{d'où :}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \begin{pmatrix} -4({}_n + 1) + 2 \\ 3({}_n + 1) \\ 2({}_n + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}_n \\ {}_n \\ {}_n \end{pmatrix} .
 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les suites $(-4({}_n + 1) + 2)_{n \in \mathbb{N}}$, $(3({}_n + 1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2({}_n + 1))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 2

Or, d'après le résultat de la question précédente, on peut écrire que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent (respectivement vers x et 2). Ainsi, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Supposons alors que x ne soit pas nul. D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite infinie. On peut finalement conclure.

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, le réel x est nul

b) (x, y, z) et (α, β, γ) étant les coordonnées respectives de la matrice B dans la base canonique et dans la base (u, v, w) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{matrix} x & -4 & -4 & 2 \\ y & = & 3 & 0 & 1 & \text{d'où :} \\ z & & 2 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -4(\alpha + \beta) + 2 \\ = & 3\alpha + & \text{soit encore :} \\ & 2\beta + \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -4\alpha - 4\beta + 2 = x \\ 3\alpha + \beta = y & \text{donc :} \\ 2\alpha + \beta = z \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -\frac{4}{3}(y - \beta) - 4\alpha + \frac{8}{3}(y - \beta) + 2 = x \\ = \frac{1}{3}(y - \beta) & \text{d'où :} \\ = z - 2 \end{matrix}$$

$$-4y + 4\alpha - 12z + 8y - 8\alpha + 2 = 3x \quad \text{soit finalement :}$$

$$= \frac{3x - 4y + 12z}{2}$$

On peut finalement conclure :

La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si $3x - 4y + 12z = 0$

5) Supposons que la matrice B vérifie la condition nécessaire et suffisante de convergence de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ce cas, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers x , 2 et 0 .

Exercice 2

Ainsi, en considérant l'expression des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ déterminée dans la question 4a, on peut écrire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} -4 & + & + 2 \\ 3 & + & \\ 2 & + & \end{pmatrix}$. Cette limite dépend donc de la valeur de X_0 , et ce quelle que soit la matrice B choisie. On peut donc conclure :

Quelle que soit la valeur de B, le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable

Problème**3.1. Comparaison de deux tarifications**

1) Comme $T_1 = aD$, on peut écrire, par linéarité de l'espérance : $E(T_1) = aE(D)$. Comme D suit une loi exponentielle de paramètre a , on peut donc conclure :

$$E(T_1) = \frac{a}{a}$$

2) * Par définition de T_2 , on a $T_2(\cdot) = \mathbb{N}^*$, et :

$n \in \mathbb{N}^*$, $p(T_2 = n) = p(n-1 < D \leq n)$ donc, comme D suit une loi exponentielle de paramètre a :

$$= \int_{n-1}^n e^{-at} dt \quad \text{i.e. :}$$

$$= -e^{-at} \Big|_{n-1}^n \quad \text{d'où :}$$

$$= -e^{-an} + e^{-a(n-1)} \quad \text{soit finalement :}$$

$$= e^{-a(n-1)} (1 - e^{-a}).$$

On peut finalement conclure :

$$T_2 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-a}$$

* On peut également conclure :

$$E(T_2) = \frac{1}{1 - e^{-a}}$$

3) a) * f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

* De plus, d'après les équivalents de référence, on peut écrire :

$$(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{t} \quad \text{d'où :}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t) = 1.$$

Comme $f(0) = 1$, f est donc continue sur \mathbb{R}^+ .

Problème

• Enfin, on a :

$$t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) = \frac{1 - e^{-t} - te^{-t}}{(1 - e^{-t})^2} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{1 - (1 + t)e^{-t}}{(1 - e^{-t})^2}.$$

Or, à l'aide d'un développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 2 au voisinage de 0, on peut écrire qu'il existe une fonction ϕ de limite nulle en 0 telle que :

$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + t^2 \phi(t) \quad \text{donc il existe une fonction } \phi \text{ de limite nulle en 0 telle que :}$$

$$(1 + t)e^{-t} = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \psi(t) \quad \text{d'où :}$$

$$1 - (1 + t)e^{-t} = \frac{t^2}{2} - t^2 \psi(t) \quad \text{et donc :}$$

$$1 - (1 + t)e^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2} \quad \text{d'où, comme } 1 - e^{-t} \underset{0}{\sim} t :$$

$$f'(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Ainsi, f' admet une limite finie en 0. Comme f est continue sur \mathbb{R}^+ et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , on peut donc conclure, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 :

est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+

b) D'après l'expression de f' déterminée à la question précédente, on peut écrire que f' est du signe de $1 - (1 + t)e^{-t}$ sur \mathbb{R}_+^* . Or, $1 - (1 + t)e^{-t}$ est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme somme et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ , et on a :

$$t \in \mathbb{R}^+, \quad f'(t) = -e^{-t} + (1 + t)e^{-t} \quad \text{soit :}$$

$$= te^{-t} \quad \text{d'où :}$$

$$t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(t) > 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . On a donc :

$$t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(t) > f(0) \quad \text{soit :}$$

$$f(t) > 0.$$

Problème

Ainsi, f , donc f' , est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* . f est donc continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . Comme $f(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$, on peut finalement conclure, d'après le théorème de la bijection :

$$f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } [1, +\infty[$$

4) a) D'après le résultat de la question précédente, on peut donc conclure, comme $a > 1$:

$$\text{Il existe un unique réel } t_0 \text{ strictement positif tel que } f(t_0) = a$$

b) D'après le résultat des questions 1 et 2, on peut écrire :

$$E(T_1) < E(T_2) \iff \frac{a}{a} < \frac{1}{1-e^{-a}} \quad \text{soit encore, comme } a > 0 :$$

$$a < \frac{1}{1-e^{-a}} \quad \text{donc, d'après le résultat de la question précédente :}$$

$$f(t_0) < f(0) \quad \text{d'où, } f \text{ étant strictement croissante sur } \mathbb{R}^+ :$$

$$t_0 < 0 \quad \text{donc, en composant par la fonction } t \mapsto \frac{1}{t}, \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* :$$

$$\frac{1}{t_0} < \frac{1}{0}$$

Or, comme D suit la loi exponentielle de paramètre a , la durée moyenne de communication (ou espérance de D) est égale à $\frac{1}{a}$. On peut donc conclure :

La tarification T_2 est plus avantageuse que la tarification T_1 si, et seulement si, la durée moyenne de communication est inférieure à $\frac{1}{a}$.

5) Dans le cas où $a = 1,25$, on peut conclure, en procédant par dichotomie à l'aide d'une calculatrice :

$$\frac{1}{a} = 2,15$$

3.2. Etude d'un standard téléphonique

3.2.1. Cas d'une seule communication

1) On a :

$$t \in \mathbb{R}^+, p(D > t) = 1 - p(D \leq t) \quad \text{donc, comme } D \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } a :$$

Problème

$$t \in \mathbb{R}^+, p(D > t) = 1 - \int_0^t a e^{-au} du \quad \text{i.e. :}$$

$$= 1 - \int_0^t -e^{-au} du \quad \text{d'où :}$$

$$t \in \mathbb{R}^+, p(D > t) = e^{-t}$$

2) On a :

$$k \in [1, n], p(D + I_n > \frac{k}{n}) = p(D > \frac{k}{n}) \quad \text{soit encore :}$$

$$= p(D > \frac{(n-k)}{n}) \quad \text{donc, d'après le résultat précédent :}$$

$$k \in [1, n], p(D + I_n > \frac{k}{n}) = e^{-\frac{(n-k)}{n}}$$

3) La famille $I_n = \frac{k}{n} \quad 1 \leq k \leq n$ constituant un système complet d'événements de probabilités non nulles, on peut écrire, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(D + I_n >) = \sum_{k=1}^n p(I_n = \frac{k}{n}) p(D + I_n > \frac{k}{n} | I_n = \frac{k}{n}) \quad \text{donc, d'après la loi de } I_n \text{ et le résultat précédent :}$$

$$= \sum_{k=1}^n e^{-\frac{(n-k)}{n}} \quad \text{d'où :}$$

$$= \frac{e^{-n}}{n} \sum_{k=1}^n (e^{1/n})^k$$

Or, comme $e^{1/n} > 0$, on a : $\sum_{k=1}^n (e^{1/n})^k = \frac{e^{1/n}(1 - e^{1/n})}{1 - e^{1/n}}$. Ainsi, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{1/n}$, on peut écrire :

$$p(D + I_n >) = \frac{e^{-n}}{n} \times e^{1/n} \times \frac{1 - e^{-1/n}}{1 - e^{1/n}}$$

Problème

Comme $e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}$, et comme $e^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{1}{n}}$, on peut finalement conclure :

$$p(D + I_n > \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{-\frac{1}{n}}}{1 - e^{-\frac{1}{n}}}$$

4) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a : $1 - e^{-\frac{1}{n}} \sim_0 \frac{1}{n}$. D'après le résultat de la question précédente, on peut donc écrire :

$$p(D + I_n > \frac{1}{n}) \sim_0 \frac{1}{n} (1 - e^{-\frac{1}{n}}).$$

On peut alors conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(D + I_n > \frac{1}{n}) = \frac{1 - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

3.2.2. Etude de l'encombrement du standard à l'instant

1) a) Sachant que l'événement $[N = r]$ est réalisé, la variable aléatoire C est égale au nombre de succès (une communication se poursuit au delà de l'instant t) dans une suite de r épreuves indépendantes (les instants aléatoires où les communications se terminent étant mutuellement indépendants) à deux issues (une communication donnée se poursuit ou non au delà de l'instant t) de même probabilité de succès p . On peut donc conclure :

La loi conditionnelle de C conditionnée par l'événement $[N = r]$ est la loi binomiale de paramètres r et p .

b) On a :

$r \in \mathbb{N}$, $k \in [0, r]$, $p([C = k] | [N = r]) = p(N = r) p(C = k / N = r)$ donc, comme N suit la loi de Poisson de paramètre λ et d'après le résultat de la question précédente :

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!} \times C_r^k p^k q^{r-k} \quad \text{soit finalement :}$$

$$r \in \mathbb{N}, \quad k \in [0, r], \quad p([C = k] | [N = r]) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k (\lambda q)^{r-k}}{k!(r-k)!}$$

Problème

c) * Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0, k - 1]$. Supposons que l'événement $[N = r]$ soit réalisé. La loi conditionnelle de C sachant $[N = r]$ étant la loi binomiale de paramètres r et p , l'événement $[C = k]$ ne peut donc être réalisé. On a donc :

$$k \in \mathbb{N}, p(C = k) = \sum_{r=k}^+ p([C = k] | [N = r]) \quad \text{donc, d'après le résultat de la question précédente :}$$

$$= \sum_{r=k}^+ \frac{e^{-p} (p)^k (q)^{r-k}}{k!(r-k)!} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{e^{-p} (p)^k}{k!} \sum_{r=k}^+ \frac{(q)^{r-k}}{(r-k)!} \quad \text{donc, en effectuant le changement d'indice } r' = r - k :$$

$$= \frac{e^{-p} (p)^k}{k!} \sum_{r=0}^+ \frac{(q)^r}{r!} \quad \text{et donc (série exponentielle) :}$$

$$= \frac{e^{-p} (p)^k}{k!} e^q \quad \text{soit finalement, comme } p = 1 - q :$$

$$k \in \mathbb{N}, p(C = k) = \frac{e^{-p} (p)^k}{k!}$$

* On peut alors conclure :

$$C \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } p$$

2) a) D'après le cours, comme C suit la loi de Poisson de paramètre p , on a : $E(C) = p$. Par définition de p , on peut alors conclure :

$$E(C) = 1 - e^{-p}$$

b) * Comme $p > 0$, on a : $\lim_{q \rightarrow 0^+} e^{-p} = 0$. On peut donc conclure :

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} E(C) = 1$$

* Comme : $\forall p \in \mathbb{R}, -e^{-p} < 0$, on peut également conclure :

$$\forall p \in \mathbb{R}, E(C) < 1$$