Loi d'une variable discrète

Enoncés

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules, dont n-1 boules rouges et une boule verte. Un individu effectue une suite de tirages d'une boule au hasard parmi les n jusqu'à ce qu'il tire la boule verte.

1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X égale au nombre de tirages effectués si ceux-ci sont effectués sans remise.

2) Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire Y égale au nombre de tirages effectués si ceux-ci sont effectués avec remise.

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches et des boules noires, dont une proportion p ($p \in]0, 1[$) de blanches et une proportion q ($q=1-p$) de noires. On effectue une suite de tirages avec remise dans cette urne et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux boules de même couleur consécutivement.

1) Calculer $p(X=2)$ et $p(X=3)$.

2) Déterminer, pour tout entier $n \in [\![2, +\infty[\![$, $p(X=n)$ (on distinguera les cas suivant la parité de n).

3) Vérifier que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p(X = k) = 1$$

Que peut-on en conclure ?

4) Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit r un entier naturel non nul. On considère une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir 'pile' est p ($p \in]0, 1[$) et la probabilité d'obtenir 'face' est $q=1-p$. On lance successivement cette pièce jusqu'à obtenir 'pile' pour la $r^{ème}$ fois. Soit alors X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{ème}$ 'pile'.

1) Déterminer la loi de X, en précisant que pour tout entier k, $p(X=k+r)$.

2) Soit $(s_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, s_n(r) = \sum_{k=0}^{n} C_{k+r}^{r} q^k$$

On admet que :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(r) = s_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

3) Soit maintenant Y le nombre de fois où l'on a obtenu face avant d'obtenir le $r^{\text{ème}}$ 'pile'. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

CORRECTION

Exercice 1

1) Les tirages étant effectués sans remise, il faut au minimum un tirage et au maximum n tirages (toutes les valeurs intermédiaires étant possibles) pour obtenir la boule verte. On a donc : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $[X=k]$ est réalisé si et seulement si la boule verte est tirée lors du kème tirage. Considérons alors que le joueur tire toutes les boules de l'urne successivement. Il y a n! suites de tirages possibles. De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a également (n-1) ! suites de tirages possibles tels que la boule verte soit tirée lors du kème tirage. Comme les n ! suites de tirages possibles sont équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [\![1, n]\!], p(X = k) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

On peut maintenant conclure :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]), \text{ i.e. : } X(\Omega) = [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, n]\!], p(X = k) = \frac{1}{n} \text{ et } E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

2) Les tirages étant effectués avec remise, Y représente le temps d'attente du premier succès lors de la réalisation d'essais indépendants (tenter d'obtenir la boule verte) d'une expérience à deux issues possibles (tirer ou ne pas tirer la boule verte) dont la probabilité d'un succès (obtenir la boule verte) est $\dfrac{1}{n}$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ i.e. : } Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, p(Y = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \text{ et } E(Y) = n}$$

Exercice 2

1) ■ Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons B_i l'événement « obtenir une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage » et N_i l'événement « obtenir une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Pour que l'événement $[X=2]$ soit réalisé, il faut et il suffit de tirer deux boules de même couleur lors des deux premiers tirages. On a donc :

$[X = 2] = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$ d'où :

$p[X=2]=p\left(\left(B_1\cap B_2\right)\cup\left(N_1\cap N_2\right)\right)$ soit, les évènements $(B_1 \cap B_2)$ et $(N_1 \cap N_2)$ étant incompatibles :

$=p(B_1\cap B_2)+p(N_1\cap N_2)$ et donc, B_1 et B_2 (resp. N_1 et N_2) étant indépendants (les tirages s'effectuant avec remise) :

$=p(B_1)p(B_2)+p(N_1)p(N_2)$ et donc comme : $\forall i\in\mathbb{N}^*, p(B_i)=p$ et $\forall i\in\mathbb{N}^*, p(N_i)=q$:

$$\boxed{p(X=2)=p^2+q^2}$$

■ De même, pour que l'événement [X=3] soit réalisé il faut et il suffit que le troisième tirage donne la première suite de deux boules blanches ou de deux boules noires consécutives. On a donc :

$[X=3]=(N_1\cap B_2\cap B_3)\cup(B_1\cap N_2\cap N_3)$ d'où :

$p[X=3]=p\left(\left(N_1\cap B_2\cap B_3\right)\cup\left(B_1\cap N_2\cap N_3\right)\right)$ soit, les évènements $(N_1 \cap B_2 \cap B_3)$ et $(B_1 \cap N_2 \cap N_3)$ étant incompatibles :

$=p(N_1\cap B_2\cap B_3)+p(B_1\cap N_2\cap N_3)$ et donc, N_1, B_2 et B_3 (resp. B_1, N_2 et N_3) étant mutuellement indépendants:

$=p(N_1)p(B_2)p(B_3)+p(B_1)p(N_2)p(N_3)$ d'où :

$=qp^2+pq^2$ et donc, comme $p+q=1$:

$=pq.$

$$\boxed{p(X=3)=pq}$$

2) De même, pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$, pour que l'événement [X=n] soit réalisé, il faut et il suffit que le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la première suite de deux boules de même couleur consécutives. On peut donc écrire :

❐ Si n est impair ($n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}^*$). Dans ce cas, une boule noire et une boule blanche ont été tirées successivement au cours des 2k-1 premiers tirages et deux boules de même couleur aux deux derniers tirages. on peut donc écrire :

$$[X=2k+1]=\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left(B_{2i-1}\cap N_{2i}\right)\cap N_{2k+1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left(N_{2i-1}\cap B_{2i}\right)\cap B_{2k+1}\right)$$

soit ces deux événements étant incompatibles :

$$[p(X=2k+1)]=p\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left(B_{2i-1}\cap N_{2i}\right)\cap N_{2k+1}\right)+p\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left(N_{2i-1}\cap B_{2i}\right)\cap B_{2k+1}\right)$$

d'où, les $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k+1}$ et les $(N_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k+1}$ étant mutuellement indépendants :

$$= p\,(N_{2k+1})\prod_{i=1}^{k}\left(p\,(B_{2i-1})\;\; p\;\;(N_{2i})\right) + p\;\;(B_{2k+1})\prod_{i=1}^{k}\left(\;p\;\;(N_{2i-1})\;\;p\;\;(B_{2i})\right)$$

soit encore :

$$= q\prod_{i=1}^{k}(pq) + p\prod_{i=1}^{k}(pq)$$

d'où, comme $p+q=1$:

$$= (pq)^k.$$

❒ Si n est pair ($n=2k$, $k\in[\![2,+\infty[\![$). Dans ce cas, une boule blanche et une boule noire ont été tirées successivement au cours des $2k$-2 premiers tirages et deux boules de même couleur lors des deux derniers tirages. On peut donc écrire :

$$[X = 2k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(B_{2i-1}\cap N_{2i})\cap B_{2k-1}\cap B_{2k}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(N_{2i-1}\cap B_{2i})\cap N_{2K-1}\cap N_{2k}\right)$$

soit ces deux évènements étant incompatibles :

$$p(X = 2k) = p\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(B_{2i-1}\cap N_{2i})\cap B_{2k-1}\cap B_{2k}\right) + p\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(N_{2i-1}\cap B_{2i})\cap N_{2k-1}\cap N_{2k}\right)$$

d'où, les $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k}$ et les $(N_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k}$ étant mutuellement indépendants :

$$= p\,(B_{2k-1})p\,(B_{2k})\prod_{i=1}^{k-1}\left(p\,(B_{2i-1})p\,(N_{2i})\right) + p\,(N_{2k-1})\,p\,(N_{2k})\prod_{i=1}^{k-1}\left(p\,(N_{2i-1})p\,(B_{2i})\right)$$

soit encore :

$$= p^2\prod_{i=1}^{k-1}\left(p(1-p)\right) + q^2\prod_{i=1}^{k-1}\left(p(1-p)\right)\quad \text{d'où:}$$

$$= (p^2+q^2)(pq)^{k-1}.$$

On peut alors conclure, le cas $k=1$ rejoignant le cas général :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} p\,(X = 2k) = \left(p^2+q^2\right)(pq)^{k-1} \\ p\,(X = 2k+1) = (pq)^k \end{cases}.}$$

3) ■ ❒ On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{2n+1} p(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p(X = 2k) + \sum_{k=1}^{n} p(X = 2k+1)$$ donc d'après les résultats précédents :

$$= \sum_{k=1}^{n}(p^2+q^2)(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n}(pq)^k$$ soit encore :

$= (p^2+q^2+pq)\sum_{k=1}^{n}(pq)^{k-1}$ et donc, en reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $pq\neq 1$:

$= (p^2+q^2+pq)\dfrac{1-(pq)^n}{1-pq}$ donc comme : $p^2+q^2-pq=1-pq$:

$= 1-(pq)^n$.

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(pq)^n = 0$ (car $pq\in]0,1[$), la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1}p(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers 1.

❒ De plus, on a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=2}^{2n}p(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1}p(X=k) - p(X=2n+1)$ donc d'après les résultats précédents :

$= 1-2(pq)^n$.

Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(pq)^n = 0$ (car $pq\in]0,1[$), la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n}p(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc vers 1.

Les suites $\left(\sum_{k=2}^{2n}p(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=2}^{2n+1}p(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant toutes deux vers 1, on peut finalement écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n}p(X=k)\right)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty}p(X=k)=1}$$

■ Comme $\sum_{k=2}^{+\infty}p(X=k) = p\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty}(X=k)\right) = 1$, on peut alors conclure :

X est bien une variable aléatoire et l'événement « *obtenir consécutivement deux boules de même couleur* » est un événement quasi-certain.

4) ☐ D'après les résultats précédents, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) = \sum_{k=1}^{n} 2kp(X=2k) + \sum_{k=1}^{n}(2k+1)p(X=2k+1)$ donc d'après les résultats précédents :

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k(p^2+q^2)(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 2k(pq)^k + \sum_{k=1}^{n}(pq)^k \text{ i.e. :}$$

$$= 2(p^2+q^2+pq)\sum_{k=1}^{n} k(pq)^{k-1} + pq\sum_{k=1}^{n}(pq)^{k-1}$$

Les séries de termes généraux respectifs $k(pq)^{k-1}$ et $(pq)^{k-1}$ étant convergentes (car $|pq|<1$), de sommes respectives $\frac{1}{(1-pq)^2}$ et $\frac{1}{1-pq}$, on peut alors écrire, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, que la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $2\frac{p^2+q^2+pq}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq}$.

Or on a :

$$2\frac{p^2+q^2+pq}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq} = \frac{2p^2+2q^2+2pq+pq-p^2q^2}{(1-pq)^2} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{2(p+q)^2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2} \quad \text{et donc, comme } p+q=1$$

$$= \frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}.$$

Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$.

❒ De plus, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) - (2n+1)p(X=2n+1)$ soit d'après les résultats précédents :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) - (2n+1)(pq^n)$$

Or, comme $pq \in]0,1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty}(pq)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n(pq)^n = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on peut alors écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$.

Les suites $\left(\sum_{k=2}^{2n} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant toutes deux vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$, on peut finalement écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} kp(X=k)\right)_{n\geq 2}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$. On peut alors conclure :

X admet une espérance, et celle-ci vaut :
$$E(X)=\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$$

Exercice 3

1) X étant le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{\text{ème}}$ pile, on a clairement : $X(\Omega) = [\![r,+\infty[\![$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'événement $[X=k+r]$ est réalisé si et seulement si le $r^{\text{ème}}$ pile est obtenu au $(k+r)^{\text{ème}}$ lancer.

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour déterminer une série de lancers de la pièce telle que le $r^{\text{ème}}$ 'pile' soit obtenu au $(k+r)^{\text{ème}}$ lancer , il faut et il suffit de :

- choisir les r-1 lancers, parmi les k+r-1 premiers lancers, au cours desquels on obtient les r-1 premiers 'pile' (C_{k+r-1}^{r-1} possibilités),
- obtenir 'pile' à ces r-1 lancers et 'face' à chacun des k lancers restants parmi les k+r-1 premiers lancers, (événement de probabilité $p^{r-1}q^k$, les lancers étant indépendants),
- obtenir 'pile' au $(k+r)^{\text{ème}}$ lancer (événement de probabilité p).

On en déduit alors : $\forall k\in\mathbb{N}, p(X=k+r)=C_{k+r-1}^{r-1}p^{r-1}q^k.p$, d'où la conclusion :

$$X(\Omega)=[\![r,+\infty[\![\text{ et } \forall k\in\mathbb{N},$$
$$p(X=k+r)=C_{k+r-1}^{r-1}p^r q^k$$

2) On a : $\forall k\in\mathbb{N}, (k+r)C_{k+r-1}^{r-1}=rC_{k+r}^{r}$. Comme la suite $(s_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite s_r, on peut écrire que la série de terme général $C_{k+r}^{r}q^k$ converge de somme s_r. On en déduit alors que X admet une espérance et que cette espérance vaut :

$$E(X)=\sum_{k=r}^{+\infty} kp\ (X=k)$$ soit en effectuant le changement de variable k'=k-r :

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)p\,(X=k+r)$$ soit encore, d'après les résultats précédents :

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$ et comme $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} = r C_{k+r}^{r}$:

$= r p^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^{r} q^k$ et en reconnaissant la somme s_r de la série de terme général $C_{k+r}^{r} q^k$:

$= p^r s_r$ soit enfin, comme $s_r = \dfrac{1}{(1-q)^{r+1}} = \dfrac{1}{p^{r+1}}$:

$$\boxed{E(X) = \frac{r}{p}}$$

■ On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} = r(r+1) C_{k+r+1}^{r+1}$. Comme la suite $(s_n(r+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite s_{r+1}, la série de terme général $C_{k+r+1}^{r+1} q^k$ converge de somme s_{r+1}. On en déduit alors que $X(X+1)$ admet une espérance et que cette espérance vaut :

$E(X(X+1)) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k+1) p(X=k)$ soit en effectuant le changement de variable k'=k-r :

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$

et comme $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} = r(r+1) C_{k+r+1}^{r+1}$:

$= r(r+1) p^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r+1}^{r+1} q^k$ et en reconnaissant la somme s_{r+1} de la série de terme général $C_{k+r+1}^{r+1} q^k$:

$= r(r+1) p^r s_{r+1}$ soit enfin, comme $s_{r+1} = \dfrac{1}{(1-q)^{r+2}} = \dfrac{1}{p^{r+2}}$:

$= \dfrac{r(r+1)}{p^2}$.

On peut maintenant écrire que X admet une variance et que cette variance vaut :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ soit :

$= E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2$ et donc, d'après les résultats précédents :

$= \dfrac{r(r+1)}{p^2} - \dfrac{r}{p} - \dfrac{r^2}{p^2}$ i.e. :

$= \dfrac{r - rp}{p^2}$ et donc :

$$\boxed{V(X) = \frac{rq}{p^2}}$$

3) Comme X est le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{ème}$ 'pile' et Y le nombre de fois où l'on a obtenu 'face' avant d'avoir pour la $r^{ème}$ fois 'pile', on a : Y+r=X, i.e. : Y=X-r. On en déduit alors :

$$\boxed{Y(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ p(Y=k)=C_{k+r-1}^{r-1}p^r q^k}$$

■ Comme Y=X-r, on peut également écrire :

- $E(Y)=E(X)-r=\frac{r}{p}-r=\frac{rq}{p}$ (par linéarité de l'espérance), et :
- $V(Y)=V(X-r)=V(X)=\frac{rq}{p^2}$ d'où la conclusion :

$$\boxed{E(Y)=\frac{rq}{p} \text{ et } V(Y)=\frac{rq}{p^2}}$$