

## Loi d'une variable discrète

### I. Variables aléatoires

- *Variable aléatoire réelle.* Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probablisable. On appelle variable aléatoire réelle (ou VAR) définie sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , toute application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ .
- *Variable aléatoire réelle discrète.* On dit que  $X$  est une variable aléatoire discrète lorsque  $X(\Omega)$  est de cardinal fini ou dénombrable (i.e. en bijection avec  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ ). On note alors :  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{Z}$  et l'application  $i \mapsto x_i$  est strictement croissante.
- Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $X + Y, \lambda X$  et  $XY$  sont alors des variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

### II. Loi de probabilité et fonction de répartition

- *Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète.* On appelle loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire réelle discrète  $X$  l'application

$$p: \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto p(X = i) \end{cases}$$

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, on peut, si l'on ne peut pas reconnaître en  $X$  une variable aléatoire suivant une loi classique, déterminer successivement l'ensemble  $X(\Omega)$  des valeurs prises par  $X$  puis déterminer, pour tout  $x_k \in X(\Omega)$ , la valeur de  $p(X = x_k)$ . Pour cela, on peut utiliser des raisonnements probabilistes en décomposant, pour tout  $x_k \in X(\Omega)$ , l'événement  $[X = x_k]$ .

- *Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.* On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète  $X$  l'application

$$F: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto p(X \leq x) \end{cases}$$

- Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète telle que  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  avec  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_{i-1} < x_i$ . On a :  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ .

III. Espérance, variance, écart-type1. Définitions

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète telle que  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

▪ *Espérance.*  $X$  admet une espérance si la série de terme général  $x_i p(X = x_i)$  est absolument convergente et on a alors :  $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p(X = x_i)$

▪ *Variance.*  $X$  admet une variance si  $X$  admet une espérance et si la série de terme général  $(x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$  est convergente (ou si  $E(X^2)$  existe) et on a alors :

$$V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = E\left[(X - E(X))^2\right], \text{ soit : } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

▪ *Ecart-type.* Si  $X$  admet une variance, on appelle écart-type de  $X$  le nombre :  $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

2. Théorèmes

▪ Soient  $X$  une variable aléatoire réelle discrète telle que  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ ,  $f$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  et  $Y = f(X)$ . Si la série de terme général  $f(x_i) p(X = x_i)$  est absolument convergente, alors  $Y$  admet une espérance et cette espérance vaut :  $E(Y) = \sum_{i \in I} f(x_i) p(X = x_i)$  (théorème dit « de transfert »). En particulier, on a :  $E(X^2) = m_2(X)$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète. On a :

-  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + b) = aE(X) + b$  (si  $X$  admet une espérance),

-  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X)$  (si  $X$  admet une variance),

-  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sigma_{aX+b} = |a| \sigma_X$  (si  $X$  admet une variance).

3. Variable centrée, réduite, centrée réduite

▪ *Variable centrée.* Une variable aléatoire est dite centrée si elle admet une espérance et si cette espérance est nulle. La variable aléatoire  $Y$  centrée associée à la variable aléatoire  $X$  est :  $Y = X - E(X)$ .

▪ *Variable réduite.* Une variable aléatoire est dite réduite si elle admet une variance et si cette variance est égale à 1. La variable aléatoire  $Y$  réduite associée à la variable aléatoire  $X$  (non quasi-certaine) est :  $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$ .

Loi d'une variable discrète

- Variable centrée réduite. Une variable aléatoire est dite centrée réduite si elle admet une variance, si son espérance est nulle et sa variance est égale à 1. La variable aléatoire Y centrée réduite associée à la variable aléatoire X (non quasi-certaine) est :  $Y=X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$ .

IV. Lois discrètes usuelles

Loi	Notation	$X(\Omega)$	$p(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
Loi uniforme Tirage au hasard d'un objet parmi n numérotés de 1 à n. X est le numéro de l'objet tiré.	$X \mapsto \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$
Loi de Bernoulli Réalisation d'une expérience n'ayant que deux issues possibles et dont la probabilité de succès est p. Loi indicatrice d'un événement.	$X \mapsto \mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$p(X=1)=p$ $p(X=0)=1-p$	<b>p</b>	<b>pq</b>
Loi binomiale Réalisation de n essais indépendants d'une expérience à deux issues possibles et dont la probabilité de succès est p. X est le nombre de succès.	$X \mapsto \mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	<b>np</b>	<b>npq</b>
Loi hypergéométrique Tirage de n individus parmi N dont une proportion p de type A. X est le nombre d'individus de type A tirés.	$X \mapsto \mathcal{H}(N, n, p)$	$\subset \llbracket 0, n \rrbracket$	$\frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$	<b>np</b>	$\frac{npq}{N-1} (N-n)$
Loi géométrique Réalisation d'essais indépendants d'une expérience à deux issues possibles. X est le temps d'attente du premier succès.	$X \mapsto \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Loi de Poisson Pas de modèle.	$X \mapsto \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	<b>λ</b>	<b>λ</b>

N.B. : les résultats grisés (ainsi que la loi de Pascal) ne sont pas au programme.