Loi d'une variable discrète

I. Variables aléatoires

- *Variable aléatoire réelle*. **Soit $(\Omega,\mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle (ou VAR) définie sur $(\Omega,\mathcal{A})$, toute application X : $\Omega\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(I)\in\mathcal{A}$.**

- *Variable aléatoire réelle discrète*. **On dit que X est une variable aléatoire discrète lorsque X(Ω) est de cardinal fini ou dénombrable (i.e. en bijection avec $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$). On note alors : $X(\Omega)=\{x_i, i\in I\}$ où I est un intervalle de $\mathbb{Z}$ et l'application** $i \mapsto x_i$ **est strictement croissante.**

- **Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. X + Y, λX et XY sont alors des variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A})$.**

II. Loi de probabilité et fonction de répartition

- *Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète.* **On appelle loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire réelle discrète X l'application**

$$p : \left| \begin{array}{l} X(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto p(X = i) \end{array} \right.$$

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, on peut, si l'on ne peut pas reconnaître en X une variable aléatoire suivant une loi classique, déterminer successivement l'ensemble X(Ω) des valeurs prises par X puis déterminer, pour tout $x_k \in X(\Omega)$, la valeur de $p(X = x_k)$. Pour cela, on peut utiliser des raisonnements probabilistes **en décomposant, pour tout $x_k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = x_k]$.**

- *Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.* **On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète X l'application**

$$\left| \begin{array}{l} F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto p(X \leq x) \end{array} \right.$$

- **Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega)=\{x_i, i\in[\![1,n]\!]\}$ avec** $\forall i \in [\![2,n]\!],\ x_{i-1} < x_i$. **On a :** $\forall i\in[\![2,n]\!], p(X = x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1})$.

III. Espérance, variance, écart-type

1. Définitions

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

- *Espérance.* **X admet une espérance si la série de terme général** $x_i p(X = x_i)$ **est absolument convergente et on a alors :** $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p(X = x_i)$

- *Variance.* **X admet une variance si X admet une espérance et si la série de terme général** $(x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$ **est convergente (ou si E(X²) existe) et on a alors :** $V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = E\left[(X - E(X))^2\right]$, **soit : V(X)=E(X²)-E(X)².**

- *Ecart-type.* **Si X admet une variance, on appelle écart-type de X le nombre :** $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

2. Théorèmes

- **Soient X une variable aléatoire réelle discrète telle que X(*Ω*)= {xᵢ, i∈I}, f une fonction définie sur X(*Ω*) et Y=f(X). Si la série de terme général f(xᵢ) p(X=xᵢ) est absolument convergente, alors Y admet une espérance et cette espérance vaut :** $E(Y) = \sum_{i \in I} f(x_i)\ p(X = x_i)$ **(théorème dit « de transfert »). En particulier, on a :**

$E(X^2) = m_2(X)$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On a :

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, E(aX+b) = aE(X) + b$ **(si X admet une espérance),**
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, V(aX+b) = a^2V(X) + b$ **(si X admet une variance),**
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$ **(si X admet une variance).**

3. Variable centrée, réduite, centrée réduite

- *Variable centrée.* **Une variable aléatoire est dite centrée si elle admet une espérance et si cette espérance est nulle. La variable aléatoire Y centrée associée à la variable aléatoire X est : Y=X-E(X).**

- *Variable réduite.* **Une variable aléatoire est dite réduite si elle admet une variance et si cette variance est égale à 1. La variable aléatoire Y réduite associée à la variable aléatoire X (non quasi-certaine) est :** $Y = \frac{X}{\sigma_X}$.

■ *Variable centrée réduite.* **Une variable aléatoire est dite centrée réduite si elle admet une variance, si son espérance est nulle et sa variance est égale à 1. La variable aléatoire Y centrée réduite associée à la variable aléatoire X (non quasi-certaine) est :** $Y = X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma_X}$.

IV. Lois discrètes usuelles

Loi	Notation	$X(\Omega)$	$p(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$
Loi uniforme **Tirage au hasard d'un objet parmi n numérotés de 1 à n. X est le numéro de l'objet tiré.**	$X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$
Loi de Bernoulli **Réalisation d'une expérience n'ayant que deux issues possibles et dont la probabilité de succès est p.** **Loi indicatrice d'un événement.**	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$p(X=1)=p$ $p(X=0)=1-p$	p	pq
Loi binomiale **Réalisation de n essais indépendants d'une expérience à deux issues possibles et dont la probabilité de succès est p. X est le nombre de succès.**	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	npq
Loi hypergéométrique **Tirage de n individus parmi N dont une proportion p de type A. X est le nombre d'individus de type A tirés.**	$X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$	$\subset \llbracket 0, n \rrbracket$	$\dfrac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$	np	$\dfrac{npq}{N-1}(N-n)$
Loi géométrique **Réalisation d'essais indépendants d'une expérience à deux issues possibles. X est le temps d'attente du premier succès.**	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$
Loi de Poisson **Pas de modèle.**	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

N.B. : les résultats grisés (ainsi que la loi de Pascal) ne sont pas au programme.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE