Le tireur et la cible

Enoncé

Dans un stand de tir, un tireur T effectue une série de tirs indépendants. Chaque tir a une probabilité $p \in]0,1[$ d'atteindre la cible.

Le tireur joue selon les règles suivantes : il a gagné (événement W) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus deux; il a perdu (événement L) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins deux ; la partie s'arrête si, et seulement si, l'un des deux événements W ou L se produit.

On considère, en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- S_n l'événement : "le $n^{ème}$ tir est dans la cible",
- E_n l'événement : "le $n^{ème}$ tir est en dehors de la cible",
- Z_n l'événement : "la partie n'est pas terminée à l'issue du $n^{ème}$ tir ",
- W_n l'événement : "le tireur a gagné à l'issue du $n^{ème}$ tir",
- L_n l'événement : "le tireur a perdu à l'issue du $n^{ème}$ tir",

et on notera, dans la suite du problème : $q=1-p$ et $u=2pq$.

1) Exprimer les événements Z_2 et Z_4 en fonction des événements S_1, S_2, S_3, S_4, E_1, E_2,E_3, E_4, puis calculer la probabilité des événements Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, celle de l'événement Z_n.

2) a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité des événements W_n et L_n.

b) En déduire les probabilités w et ℓ des événements W et L, puis la probabilité que la partie ne s'arrête pas.

3) On adopte désormais de nouvelles règles, où l'on considère que le tireur a perdu (événement M) si le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins trois. On considère qu'il a gagné (événement W) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus deux.

On considérera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- A_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus un",

- B_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible",

- C_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins un",

- D_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins deux",

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n, b_n, c_n$ et d_n, les probabilités respectives de ces événements. On suppose que les séries de terme général a_n, b_n, c_n et d_n sont convergentes, et on note a, b, c et d leurs sommes respectives. On pose également : $a_0 = c_0 = d_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n, b_n, c_n$ et d_n en fonction de $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ et d_{n-1}.

b) En déduire quatre relations entre a, b, c et d, puis calculer a et d.

c) En déduire les probabilités w et m des événements W et M, puis en déduire la probabilité que la partie ne s'arrête pas.

d) Montrer qu'il existe une unique valeur de p telle que $w = m$.

Correction

1) On a, Z_2 étant réalisé si, et seulement si, il y a un tir réussi et un tir raté :

$$Z_2 = [S_1 \cap E_2] \cup [E_1 \cap S_2].$$

Et de même :

$$Z_4 = \left([S_1 \cap E_2] \cup [E_1 \cap S_2]\right) \cap \left([S_3 \cap E_4] \cup [E_3 \cap S_4]\right).$$

Donc :

$$\boxed{Z_4 = \left([S_1 \cap E_2] \cap [S_3 \cap E_4]\right) \cup \left([S_1 \cap E_2] \cap [E_3 \cap S_4]\right) \cup \left([E_1 \cap S_2] \cap [S_3 \cap E_4]\right) \cup \left([E_1 \cap S_2] \cap [E_3 \cap S_4]\right)}.$$

Comme la partie ne peut se terminer en une seule partie :

$$\boxed{p(Z_1)=0}$$

D'après la question précédente, les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(Z_2) &= p(S_1 \cap E_2) + p(E_1 \cap S_2) \\ &= p\ (S_1)\ p(E_2) + p(E_1)\ p(E_2) \end{aligned}$$ événements indépendants

Donc :

$$\boxed{p\ (Z_2)\ =\ 2p\ (1\text{-}p)}$$

On a : $Z_2 = Z_3$. En effet, la partie n'est pas terminée après 2 tirs si, et seulement si, elle ne l'est pas après 3 tirs. D'où :

$$\boxed{p\ (Z_3)\ =\ 2p\ (1\text{-}p)}$$

Et de même :

$$\boxed{p\ (Z_4)\ =\ 4p^2\ (1\text{-}p)^2}$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, Z_{2n} est réalisé si, et seulement si, il y a une succession de succès et échecs, n fois.

Comme les résultats sont indépendants et qu'il y a deux possibilités d'ordonner un succès et un échec :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\ (Z_{2n}) = [2p\ (1-p)]^n}$$

Et d'après les remarques précédentes :

$Z_{2n} = Z_{2n+1}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\ (Z_{2n+1}) = [2p\ (1-p)]^n}$$

2) a) On a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, p\ (W_{2n+2}) = p\ (L_{2n+1}) = 0}$$

De plus :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n+2} = Z_{2n} \cap S_{2n+1} \cap S_{2n+2}$

Et donc (indépendance des événements):
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, P(W_{2n+2}) &= p\ (Z_{2n})\ p^2 \\ &= p^2\ [2p(1-p)]^n.\end{aligned}$$

n=0 rejoignant le cas général :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\ (W_{2n}) = p^2\ [\ 2p\ (1-p)]^{n-1}}$$

Et en procédant de même :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p\ (L_{2n}) = (1-p)^2\ [\ 2p\ (1-p)]^{n-1}}$$

b) On a :
$W = \bigcup_{n=1}^{+\infty} W_n$ et comme W_{2n+1} est impossible :
$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} W_{2n}$

d'où :

$$\begin{aligned}p(W) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(W_{2n}) \\ &= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} [2p\,(1-p)]^{n-1}\end{aligned}$$
et en reconnaissant une série géométrique :
$$= p^2 \left[\frac{1}{1-2p\ (1-p)}\right]$$

Soit :

$$\boxed{p(W) = \frac{p^2}{1-2p\,(1-p)}}$$

De même on obtient :

$$\boxed{p(L) = \frac{(1-p)^2}{1-2p\,(1-p)}}$$

On cherche :

$$p(\overline{W \cup L}) = 1\text{-}p\,(W)\text{-}p\,(L)$$
$$= 1 - \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-2p\,(1-p)}$$
$$= 1 - \frac{2p^2 - 2p + 1}{2p^2 - 2p + 1}$$
$$= 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que la partie ne s'arrête pas est nulle.}}$$

3) a) On a (B_0 étant certain) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = B_{n-1} \cap S_n$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(A_n) = p(B_{n-1})p(S_n / B_{n-1})$$

Et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = p.b_{n-1}}$$

De même, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = [A_{n-1} \cap E_n] \cup [C_{n-1} \cap S_n]$$

D'où, les événements étant incompatibles :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = p\left[A_{n-1} \cap E_n\right] + p\left[C_{n-1} \cap S_n\right]$

Et donc :

$$\forall n \geq 2,\ b_n = a_{n-1}p(E_n / A_{n-1}) + c_{n-1}p(S_n / C_{n-1})$$
$$= (1\text{-}p)\ a_{n\text{-}1} + p\ c_{n\text{-}1}$$

Et n=1 rejoignant le cas général :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = (1-p)a_{n-1} + pc_{n-1}}$$

De même:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} c_n = (1\text{-}p)\ b_{n\text{-}1} + p\ d_{n-1} \\ d_n = (1\text{-}p)\ c_{n\text{-}1} \end{cases}}$$

b) Les séries étant convergentes, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = p\sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}$$
$$= p\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad (n'=n\text{-}1)$$

Et comme $a_0=0$:

$$\boxed{a = p.b}$$

De même, on obtient comme $b_0=1$:

$$\boxed{\begin{gathered} b = (1\text{-}p)a + p.c + 1 \\ c = (1\text{-}p)b + p.d \\ d = (1\text{-}p)c \end{gathered}}$$

D'où avec $b = \dfrac{a}{p}$ et $c = \dfrac{d}{1-p}$, on obtient après résolution :

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{p(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \\ b &= \frac{(1-p)^2}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \end{aligned}}$$

c) On a :

$$W = \bigcup_{n=2}^{+\infty} W_n$$

D'où :

$$p(W) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(W_n)$$

Or :

$$\forall n \geq 2, p(W_n) = p(A_{n-1} \cap S_n) = p\ a_{n-1}$$

Ainsi :
$w=p(W)$
$=pa.$

Et donc :

$$\boxed{w = \frac{p^2(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}}$$

De même:

$$\begin{aligned} m=p(M) &= \sum_{n=3}^{+\infty} p(L_n) \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} (1\text{-}p)\ d_{n-1} \\ &= (1-p)\left[d - d_1 - d_0\right] \\ &= (1-p)\ d \quad \text{car } d_0=d_1=0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{m = \frac{(1-p)^3}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}}$$

Enfin, de même qu'au 2.b, on cherche 1-w-m=0, après calculs et donc :

$\boxed{\text{La probabilité que la partie ne s'arrête pas est nulle.}}$

d) $w=m \Leftrightarrow p^2(1-p+p^2) = (1-p)^3$

$\Leftrightarrow p^4 - 2p^2 + 3p - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 1 = 0$ (en posant $p = \frac{1}{x}, x > 1$)

Probabilités

Le tireur et la cible

Après étude de fonction, $x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 1$ s'annule exactement une fois sur $]1, +\infty[$, et donc :

$$\boxed{\text{Il existe un seul } p \text{ tel que : } w = m}$$