

Le tireur et la cible

Enoncé

Dans un stand de tir, un tireur T effectue une série de tirs indépendants. Chaque tir a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'atteindre la cible.

Le tireur joue selon les règles suivantes : il a gagné (événement W) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus deux; il a perdu (événement L) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins deux ; la partie s'arrête si, et seulement si, l'un des deux événements W ou L se produit.

On considère, en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- S_n l'événement : "le $n^{\text{ème}}$ tir est dans la cible",
- E_n l'événement : "le $n^{\text{ème}}$ tir est en dehors de la cible",
- Z_n l'événement : "la partie n'est pas terminée à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir",
- W_n l'événement : "le tireur a gagné à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir",
- L_n l'événement : "le tireur a perdu à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir",

et on notera, dans la suite du problème : $q=1-p$ et $u=2pq$.

1) Exprimer les événements Z_2 et Z_4 en fonction des événements $S_1, S_2, S_3, S_4, E_1, E_2, E_3, E_4$, puis calculer la probabilité des événements Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, celle de l'événement Z_n .

2) a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité des événements W_n et L_n .

b) En déduire les probabilités w et ℓ des événements W et L , puis la probabilité que la partie ne s'arrête pas.

3) On adopte désormais de nouvelles règles, où l'on considère que le tireur a perdu (événement M) si le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins trois. On considère qu'il a gagné (événement W) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus deux.

On considérera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- A_n l'événement : "à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus un",
- B_n l'événement : "à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible",

Le tireur et la cible

- C_n l'événement : "à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins un",
- D_n l'événement : "à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins deux",

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n, b_n, c_n et d_n , les probabilités respectives de ces événements. On suppose que les séries de terme général a_n, b_n, c_n et d_n sont convergentes, et on note a, b, c et d leurs sommes respectives. On pose également : $a_0 = c_0 = d_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

- a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n, b_n, c_n et d_n en fonction de $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ et d_{n-1} .
- b) En déduire quatre relations entre a, b, c et d , puis calculer a et d .
- c) En déduire les probabilités w et m des événements W et M , puis en déduire la probabilité que la partie ne s'arrête pas.
- d) Montrer qu'il existe une unique valeur de p telle que $w=m$.

Correction

1) On a, Z_2 étant réalisé si, et seulement si, il y a un tir réussi et un tir raté :

$$Z_2 = [S_1 \cap E_2] \cup [E_1 \cap S_2].$$

Et de même :

$$Z_4 = ([S_1 \cap E_2] \cup [E_1 \cap S_2]) \cap ([S_3 \cap E_4] \cup [E_3 \cap S_4]).$$

Donc :

$$Z_4 = ([S_1 \cap E_2] \cap [S_3 \cap E_4]) \cup ([S_1 \cap E_2] \cap [E_3 \cap S_4]) \cup ([E_1 \cap S_2] \cap [S_3 \cap E_4]) \cup ([E_1 \cap S_2] \cap [E_3 \cap S_4]).$$

Comme la partie ne peut se terminer en une seule partie :

$$p(Z_1) = 0$$

D'après la question précédente, les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(Z_2) &= p(S_1 \cap E_2) + p(E_1 \cap S_2) \\ &= p(S_1) p(E_2) + p(E_1) p(S_2) \quad \text{événements indépendants} \end{aligned}$$

Donc :

$$p(Z_2) = 2p(1-p)$$

On a : $Z_2 = Z_3$. En effet, la partie n'est pas terminée après 2 tirs si, et seulement si, elle ne l'est pas après 3 tirs. D'où :

$$p(Z_3) = 2p(1-p)$$

Et de même :

$$p(Z_4) = 4p^2(1-p)^2$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, Z_{2n} est réalisé si, et seulement si, il y a une succession de succès et échecs, n fois.

Comme les résultats sont indépendants et qu'il y a deux possibilités d'ordonner un succès et un échec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(Z_{2n}) = [2p(1-p)]^n$$

Le tireur et la cible

Et d'après les remarques précédentes :

$Z_{2n} = Z_{2n+1}$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(Z_{2n+1}) = [2p(1-p)]^n$$

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(W_{2n+2}) = p(L_{2n+1}) = 0$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n+2} = Z_{2n} \cap S_{2n+1} \cap S_{2n+2}$$

Et donc (indépendance des événements):

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, P(W_{2n+2}) &= p(Z_{2n}) p^2 \\ &= p^2 [2p(1-p)]^n. \end{aligned}$$

$n=0$ rejoignant le cas général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(W_{2n}) = p^2 [2p(1-p)]^{n-1}$$

Et en procédant de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(L_{2n}) = (1-p)^2 [2p(1-p)]^{n-1}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} W_n \quad \text{et comme } W_{2n+1} \text{ est impossible :} \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty} W_{2n} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} p(W) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(W_{2n}) \\ &= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} [2p(1-p)]^{n-1} \quad \text{et en reconnaissant une série géométrique :} \\ &= p^2 \left[\frac{1}{1 - 2p(1-p)} \right] \end{aligned}$$

Le tireur et la cible

Soit :

$$p(W) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}$$

De même on obtient :

$$p(L) = \frac{(1-p)^2}{1 - 2p(1-p)}$$

On cherche :

$$\begin{aligned} p(\overline{W \cup L}) &= 1 - p(W) - p(L) \\ &= 1 - \frac{p^2 + (1-p)^2}{1 - 2p(1-p)} \\ &= 1 - \frac{2p^2 - 2p + 1}{2p^2 - 2p + 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc :

La probabilité que la partie ne s'arrête pas est nulle.

3) a) On a (B_0 étant certain) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = B_{n-1} \cap S_n$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(A_n) = p(B_{n-1})p(S_n / B_{n-1})$$

Et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = p \cdot b_{n-1}$$

De même, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = [A_{n-1} \cap E_n] \cup [C_{n-1} \cap S_n]$$

D'où, les événements étant incompatibles :

Le tireur et la cible

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = p[A_{n-1} \cap E_n] + p[C_{n-1} \cap S_n]$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, b_n &= a_{n-1}p(E_n / A_{n-1}) + c_{n-1}p(S_n / C_{n-1}) \\ &= (1-p) a_{n-1} + p c_{n-1} \end{aligned}$$

Et n=1 rejoignant le cas général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = (1-p)a_{n-1} + pc_{n-1}$$

De même:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} c_n = (1-p) b_{n-1} + p d_{n-1} \\ d_n = (1-p) c_{n-1} \end{cases}$$

b) Les séries étant convergentes, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= p \sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1} \\ &= p \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad (n'=n-1) \end{aligned}$$

Et comme $a_0=0$:

$$a = p \cdot b$$

De même, on obtient comme $b_0=1$:

$$\begin{aligned} b &= (1-p)a + p \cdot c + 1 \\ c &= (1-p)b + p \cdot d \\ d &= (1-p)c \end{aligned}$$

D'où avec $b = \frac{a}{p}$ et $c = \frac{d}{1-p}$, on obtient après résolution :

$$\begin{aligned} a &= \frac{p(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \\ b &= \frac{(1-p)^2}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1} \end{aligned}$$

c) On a :

Le tireur et la cible

$$W = \bigcup_{n=2}^{+\infty} W_n$$

D'où :

$$p(W) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(W_n)$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, p(W_n) &= p(A_{n-1} \cap S_n) \\ &= p a_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} w &= p(W) \\ &= pa. \end{aligned}$$

Et donc :

$$w = \frac{p^2(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$

De même:

$$\begin{aligned} m &= p(M) = \sum_{n=3}^{+\infty} p(L_n) \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} (1-p) d_{n-1} \\ &= (1-p)[d - d_1 - d_0] \\ &= (1-p) d \quad \text{car } d_0 = d_1 = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$m = \frac{(1-p)^3}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$

Enfin, de même qu'au 2.b, on cherche $1-w-m=0$, après calculs et donc :

La probabilité que la partie ne s'arrête pas est nulle.

$$\begin{aligned} \text{d) } w=m &\Leftrightarrow p^2(1-p+p^2) = (1-p)^3 \\ &\Leftrightarrow p^4 - 2p^2 + 3p - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 1 = 0 \quad \left(\text{en posant } p = \frac{1}{x}, x > 1\right) \end{aligned}$$

Le tireur et la cible

Après étude de fonction, $x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 1$ s'annule exactement une fois sur $]1, +\infty[$, et donc :

Il existe un seul p tel que : $w=m$