Le raisonnement probabiliste

Principe

Pour déterminer la probabilité d'un événement E, on peut chercher à **identifier différentes étapes nécessaires à sa réalisation** (en écrivant, par exemple : « pour que l'événement E soit réalisé, il faut et il suffit que … »), c'est à dire à écrire E comme réunion, intersection et/ou privation d'événements plus simples.

En principe, on notera que :

- l'événement « A ou B » s'écrit : $A \cup B$,
- l'événement « A et B » s'écrit : $A \cap B$,
- L'événement « non A » s'écrit : $\overline{A}$,
- L'événement « A mais pas B » s'écrit : $A \setminus B$

Calcul de la probabilité d'une union finie

Pour déterminer la probabilité d'une union finie d'événements, on peut :

- Soit **prouver l'incompatibilité des événements deux à deux** (i.e. que deux événements quelconques de la réunion ne peuvent être réalisés simultanément) puis calculer la somme des probabilités,

- Soit utiliser **la formule de Poincaré** (on pensera alors que la seconde somme comporte C_n^k termes).

Calcul de la probabilité d'une intersection finie

Pour déterminer la probabilité d'une intersection finie d'événements, on peut :

- Soit **prouver l'indépendance mutuelle** des événements concernés puis calculer le produit des probabilités,

- Soit utiliser la **formule des probabilités composées.**

▲ ***Indépendance de deux événements.*** Deux événements A et B sont indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Si A et B sont deux événements indépendants, alors les événements A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

▲ ***Indépendance d'une suite d'événements.*** Soit I une partie de cardinal supérieur ou égal à 2 de $\mathbb{N}$ et $(A_i)_{i \in I}$ une suite d'événements.

$(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements deux à deux indépendants si :

- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j, p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$

$(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants (ou indépendants), si :

$$\forall J \subset I, p\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} p(A_i)$$

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants (ou indépendants), alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ (où pour tout $i\in I$, B_i désigne A_i ou $\overline{A_i}$) est également une famille d'événements mutuellement indépendants.

Attention… A moins que cela ne soit la résultante directe des hypothèses formulées par l'énoncé, il est délicat de justifier en français l'indépendance deux à deux ou mutuelle d'une famille d'événements. Il est donc parfois nécessaire de revenir à la définition et de procéder à quelques calculs.