Le raisonnement combinatoire

Enoncés

Exercice 1

On permute au hasard les n tomes discernables d'une encyclopédie ($n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$).

Déterminer la probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte dans cet ordre ?

Exercice 2

On considère les événements A et B définis par :

A : « on obtient au moins un as en lançant 6 fois un dé à 6 faces »

B : « on obtient au moins un double as en lançant 6 fois deux dés discernables à six faces ».

Quel est, de A et de B , l'événement le plus probable ?

Exercice 3

On effectue une suite de n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$) sans remise, dans une urne contenant p boules ($p \geq n$) numérotées de 1 à p .

Déterminer la probabilité que les n boules tirées soient obtenues dans l'ordre croissant des numéros.

Correction

Exercice 1

Il y a autant de permutations possibles de n encyclopédies que de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, soit $n!$ (car les encyclopédies sont discernables).

Par ailleurs, pour déterminer une permutation des n encyclopédies telle que les tomes 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre, il faut et il suffit de :

- ▲ Déterminer, parmi les places $1, 2, \dots, n-1$, la place du tome 1 ($n-1$ possibilités) puis de :
- ▲ Placer le tome 2 à côté du tome 1 (1 façon) et de :
- ▲ Permuter les $n-2$ tomes restants dans les $n-2$ emplacements restants ($(n-2)!$ façons)

Ainsi, il y a au total $(n-1)!$ permutations des tomes de l'encyclopédie telles que les tomes 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre. Les $n!$ permutations possibles étant équiprobables, on peut alors conclure :

La probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte, dans cet ordre, est égale à $\frac{1}{n}$

Exercice 2

i) L'événement $\bar{A}$ est réalisé si, et seulement si, l'on n'a jamais obtenu d'as dans la suite de tirages. Or il y a 6^6 suites de tirages possibles, toutes équiprobables, et 5^6 suites de tirages favorables à la réalisation de $\bar{A}$, donc :

$$p(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

$$\text{On a donc } p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

ii) De même l'événement $\bar{B}$ est réalisé si, et seulement si, l'on n'a jamais obtenu de double as dans la suite de tirages. Or, les deux dés étant discernables, il y a $6^2=36$ résultats possibles à chaque lancer, dont un double as. Il y a donc 36^6 suites de lancers possibles, toutes équiprobables, parmi lesquelles 35^6 mènent à la réalisation de $\bar{B}$. On a donc :

$$p(\bar{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^6 \quad \text{d'où}$$

Le raisonnement combinatoire

$$p(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

iii) On peut alors écrire :

$$p(A) \geq p(B) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \geq 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6 \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^6 \leq \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$ étant croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, on peut alors écrire :

$$p(A) \geq p(B) \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq \frac{35}{36} \quad \text{d'où}$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 7.$$

Cette dernière proposition étant vraie, on peut alors conclure :

A est plus probable que B

Exercice 3

Une suite de n tirages dans l'urne est une n -liste d'éléments distincts de $\llbracket 1, p \rrbracket$. Il y a donc A_p^n suites de tirages possibles équiprobables.

De plus, pour déterminer une suite de n tirages telle que les numéros des n boules soient obtenus dans l'ordre croissant, il faut et il suffit de :

- Déterminer les n numéros obtenus (C_p^n façons) puis de
- Les ordonner dans l'ordre croissant (1 façon)

Ainsi, il y a C_p^n suite de tirages favorables à la réalisation de l'événement considéré. On peut finalement conclure :

La probabilité que les boules soient obtenues dans l'ordre croissant des numéros est $\frac{A_p^n}{C_p^n} = \frac{1}{n!}$