Le raisonnement combinatoire

Enoncés

Exercice 1

On permute au hasard les n tomes discernables d'une encyclopédie ($n \in [\![2,+\infty[\![$).

Déterminer la probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte dans cet ordre ?

Exercice 2

On considère les événements A et B définis par :

A : « on obtient au moins un as en lançant 6 fois un dé à 6 faces »
B : « on obtient au moins un double as en lançant 6 fois deux dés discernables à six faces ».

Quel est, de A et de B, l'événement le plus probable ?

Exercice 3

On effectue une suite de n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$) sans remise, dans une urne contenant p boules ($p \geq n$) numérotées de 1 à p.

Déterminer la probabilité que les n boules tirées soient obtenues dans l'ordre croissant des numéros.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

Correction

Exercice 1

Il y a autant de permutations possibles de n encyclopédies que de permutations de $[\![1,n]\!]$, soit n! (car les encyclopédies sont discernables).

Par ailleurs, pour déterminer une permutation des n encyclopédies telle que les tomes 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre, il faut et il suffit de :

- Déterminer, parmi les places 1,2…,n-1, la place du tome 1 (n-1 possibilités) puis de :
- Placer le tome 2 à côté du tome 1 (1 façon) et de :
- Permuter les n-2 tomes restants dans les n – 2 emplacements restants ((n-2)! façons)

Ainsi, il y a au total (n-1)! permutations des tomes de l'encyclopédie telles que les tomes 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre. Les n! permutations possibles étant équiprobables, on peut alors conclure :

La probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte, dans cet ordre, est égale à $\frac{1}{n}$

Exercice 2

i) L'événement $\overline{A}$ est réalisé si, et seulement si, l'on n'a jamais obtenu d'as dans la suite de tirages. Or il y a 6^6 suites de tirages possibles, toutes équiprobables, et 5^6 suites de tirages favorables à la réalisation de $\overline{A}$, donc :

$$p(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

On a donc $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

ii) De même l'événement $\overline{B}$ est réalisé si, et seulement si, l'on n'a jamais obtenu de double as dans la suite de tirages. Or, les deux dés étant discernables, il y a 6^2=36 résultats possibles à chaque lancer, dont un double as. Il y a donc 36^6 suites de lancers possibles, toutes équiprobables, parmi lesquelles 35^6 mènent à la réalisation de $\overline{B}$. On a donc :

$$p\left(\overline{B}\right) = \left(\frac{35}{36}\right)^6$$ d'où

$$p(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

iii) On peut alors écrire :

$$p(A) \geq p(B) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \geq 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6 \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^6 \leq \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$ étant croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, on peut alors écrire :

$$p(A) \geq p(B) \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq \frac{35}{36} \qquad \text{d'où}$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 7.$$

Cette dernière proposition étant vraie, on peut alors conclure :

A est plus probable que B

Exercice 3

Une suite de n tirages dans l'urne est une n–liste d'éléments distincts de $[\![1, p]\!]$. Il y a donc A_p^n suites de tirages possibles équiprobables.

De plus, pour déterminer une suite de n tirages telle que les numéros des n boules soient obtenus dans l'ordre croissant, il faut et il suffit de :

- Déterminer les n numéros obtenus (C_p^n façons) puis de
- Les ordonner dans l'ordre croissant (1 façon)

Ainsi, il y a C_p^n suite de tirages favorables à la réalisation de l'événement considéré. On peut finalement conclure :

La probabilité que les boules soient obtenues dans l'ordre croissant des numéros est $\dfrac{A_p^n}{C_p^n} = \dfrac{1}{n!}$