Partitions et involutions

Enoncé

On appelle partition en paires d'un ensemble E toute partition de E constituée uniquement de paires.

Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ constituent des partitions en paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2n éléments. Par convention, on pose $a_0 = 1$.

a) Calculer a_1 et a_2.

b) Exprimer a_3 en fonction de a_2 (on pourra considérer un élément x d'un ensemble à 6 éléments et choisir l'élément avec lequel il forme une paire).

c) A l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n.

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par b_m le nombre de partitions en paires et/ou en singletons d'un ensemble à m éléments, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à

m éléments qui ne soient constituées que de paires et/ou de singletons. Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ et $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ constituent des partitions en paires et/ou en singletons de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Par convention, on pose : $b_0 = 1$.

a) Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.

b) On suppose dans cette question que $m = 2p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. En considérant les éléments qui constituent les paires lors de la partition d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_{2p} = \sum_{i=0}^{p} C_{2p}^{2i} a_i.$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de b_{2p} en fonction de p.

c) Etablir une formule analogue dans le cas où $m = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$.

d) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. En considérant un élément particulier d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}.$$

1.3 On appelle involution d'un ensemble E toute bijection f de E sur E telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. *On note alors, pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, T_m *le nombre d'involutions d'un ensemble à m éléments. Etablir que :*

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m.$$

Correction

1) ***a)*** *Si E contient deux éléments a et b, il y a une unique partition en paire de E :* $\{\{a,b\}\}$. *Donc :*

$$\boxed{a_1=1}$$

Dénombrons les partitions en paire de E avec : $E=\{a,b,c,d\}$. Les éléments étant répartis en paires, les seules possibilités sont : $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$, $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$, $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$. d'où :

$$\boxed{a_2=3}$$

b) Posons $A_3=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ et considérons l'élément x_1. Pour effectuer une partition en paires de A_3, il faut, et il suffit de :

- choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est à dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
- effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les 4 éléments restants.

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$. Cet ensemble étant constitué de 5 éléments, il y a donc 5 choix du binôme de x_1. De plus, par définition de a_2, on sait qu'il existe a_2 partitions en paires de l'ensemble constitué par les 4 éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe $5\,a_2$ partitions en paires de A_3, et donc, d'après la définition de a_3 :

$$\boxed{a_3=5a_2}$$

c) Soient n un entier naturel non nul, A_{n+1} un ensemble à 2n+2 éléments : $A_{n+1}=\{x_k, k\in[\![1,2n+2]\!]\}$ et considérons l'élément x_1. Pour effectuer une partition en paires de A_{n+1}, il faut, et il suffit de :

- choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est à dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
- effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les 2n éléments restants.

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_k, k \in [\![2, 2n+2]\!]\}$. Cet ensemble étant de cardinal 2n+1, il y a donc 2n+1 possibilités pour choisir le binôme de x_1. De plus, par définition de a_n, on sait qu'il existe a_n partitions en paires de l'ensemble constitué par les 2n éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe $(2n+1)a_n$ partitions en paires de A_{n+1}, et donc, par définition de a_{n+1} :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = (2n+1)a_n}$$

d) Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

- Au rang n=1. Comme il y a une seule partition en paires d'un ensemble à deux éléments, on a : $a_1 = 1 = \dfrac{2!}{2^1 1!}$, donc la propriété est vérifiée au rang n=1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$a_{n+1} = (2n+1)a_n$$ donc, par hypothèse de récurrence :

$$= (2n+1)\frac{(2n)!}{2^n n!}$$ soit encore :

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)}$$ et donc :

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Ainsi, si la propriété est vérifiée au rang n, elle l'est également au rang n+1.

- On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

2) a) *Si* $E = \{a\}$*, seule la partition* $\{\{a\}\}$ *convient. D'où :*

$$\boxed{b_1 = 1}$$

Si $E = \{a, b\}$, seules les partitions $\{\{a, b\}\}$ et $\{\{a\}, \{b\}\}$ conviennent, d'où :

$$\boxed{b_2 = 2}$$

Si $E = \{a, b, c\}$, seules les partitions :
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{b, c\}, \{a\}\}$, conviennent, d'où :

$$\boxed{b_3 = 4}$$

Si $E = \{a, b, c, d\}$, seules les partitions
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\}$
$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}$, $\{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}$, $\{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$
conviennent, d'où :

$$\boxed{b_4 = 10}$$

b) Soit B_m l'ensemble des partitions d'un ensemble à m éléments, $B_{m,k}$ l'ensemble des partitions d'un ensemble à m éléments dont $2k$ éléments sont en paires ($i \in [\![0, p]\!]$). On a : $B_m = \bigcup_{k=0}^{p} B_{m,k}$

D'où, l'union étant disjointe :

$$\text{Card } B_m = \sum_{k=0}^{p} \text{card } B_{m,k}$$

Or :

- $\text{Card } B_m = b_m$
- $\text{card } B_{m,k} = C_m^{2k}.a_k$, (on choisit les 2k éléments qui sont en paires puis on effectue une partition en paires de cet ensemble).

D'où :

$$B_m = \sum_{k=0}^{p} C_m^{2k} a_k$$

Et comme $m = 2p$:

$$\boxed{b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p}^{2k} a_k}$$

D'après 1.d, on a donc :

$$b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p}^{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!},$$

D'où :

$$\boxed{b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!2^k k!}}$$

c) De même, on obtient :

$$b_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k} a_k$$

Soit :

$$\boxed{b_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{(2p+1-2k)!2^k k!}}$$

d) Soient a un élément de l'ensemble E dont on effectue une partition, C_m l'ensemble des partitions de E telles que a soit en singleton, D_m l'ensemble des partitions de E telles que a soit dans une paire. On a :

$B_m = C_m \cup D_m$ d'où (union disjointe) :

$\mathrm{Card}B_m = \mathrm{Card}C_m + \mathrm{Card}D_m$

Or, on a :

$\mathrm{Card}B_m = b_m$ et (en effectuant une partition de l'ensemble des m-1 éléments restants) :

$\mathrm{Card}C_m = b_{m-1}$ et :

$\mathrm{Card}D_m = (m-1)b_{m-2}$

(on choisit l'élément qui forme la paire avec a puis on effectue une partition de l'ensemble des m-2 éléments restants)

D'où le résultat :

$$\boxed{b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}}$$

3) Construire une involution de E sur lui-même revient à effectuer une partition de E en paires et/ou en singletons. En effet, tout élément a de E vérifie soit f(a)=a, et donc $(f \circ f)(a) = a$, soit f(a)=b (et donc f(b)=a nécessairement). Ainsi, il s'agit de répartir les éléments de E en singletons (ceux qui sont leur propre image) et/ou en paires (ceux qui sont l'image d'un autre). Ainsi :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m}$$