

Partitions et involutions

Énoncé

On appelle partition en paires d'un ensemble E toute partition de E constituée uniquement de paires.

Par exemple, les ensembles $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ et $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ constituent des partitions en paires de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à $2n$ éléments. Par convention, on pose $a_0 = 1$.*

- a) Calculer a_1 et a_2 .
- b) Exprimer a_3 en fonction de a_2 (on pourra considérer un élément x d'un ensemble à 6 éléments et choisir l'élément avec lequel il forme une paire).
- c) A l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n .
- d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^$, on désigne par b_m le nombre de partitions en paires et/ou en singletons d'un ensemble à m éléments, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à*

m éléments qui ne soient constituées que de paires et/ou de singletons. Par exemple, les ensembles $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ constituent des partitions en paires et/ou en singletons de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Par convention, on pose : $b_0 = 1$.

- a) Déterminer b_1 , b_2 , b_3 et b_4 .

- b) On suppose dans cette question que $m = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). En considérant les éléments qui constituent les paires lors de la partition d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_{2p} = \sum_{i=0}^p C_{2p}^{2i} a_i.$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de b_{2p} en fonction de p .

- c) Etablir une formule analogue dans le cas où $m = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$).
- d) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. En considérant un élément particulier d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}.$$

1.3 On appelle *involution* d'un ensemble E toute bijection f de E sur E telle que $f \circ f = \text{id}$. On note alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, T_m le nombre d'involutions d'un ensemble à m éléments. Etablir que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m.$$

Correction

- 1) a) Si E contient deux éléments a et b , il y a une unique partition en paire de E : $\{\{a, b\}\}$. Donc :

$$a_1 = 1$$

Dénombrons les partitions en paire de E avec : $E = \{a, b, c, d\}$. Les éléments étant répartis en paires, les seules possibilités sont : $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$. d'où :

$$a_2 = 3$$

b) Posons $A_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ et considérons l'élément x_1 . Pour effectuer une partition en paires de A_3 , il faut, et il suffit de :

- choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est à dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
- effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les 4 éléments restants.

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Cet ensemble étant constitué de 5 éléments, il y a donc 5 choix du binôme de x_1 . De plus, par définition de a_2 , on sait qu'il existe a_2 partitions en paires de l'ensemble constitué par les 4 éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe 5 a_2 partitions en paires de A_3 , et donc, d'après la définition de a_3 :

$$a_3 = 5a_2$$

c) Soient n un entier naturel non nul, A_{n+1} un ensemble à $2n+2$ éléments :

$A_{n+1} = \{x_k, k \in \llbracket 1, 2n+2 \rrbracket\}$ et considérons l'élément x_1 . Pour effectuer une partition en paires de A_{n+1} , il faut, et il suffit de :

- choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est à dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
- effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les $2n$ éléments restants.

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_k, k \in [2, 2n+2]\}$. Cet ensemble étant de cardinal $2n+1$, il y a donc $2n+1$ possibilités pour choisir le binôme de x_1 . De plus, par définition de a_n , on sait qu'il existe a_n partitions en paires de l'ensemble constitué par les $2n$ éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe $(2n+1)a_n$ partitions en paires de A_{n+1} , et donc, par définition de a_{n+1} :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = (2n+1)a_n$$

d) Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

- Au rang $n=1$. Comme il y a une seule partition en paires d'un ensemble à deux éléments, on a : $a_1 = 1 = \frac{2!}{2^1 1!}$, donc la propriété est vérifiée au rang $n=1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (2n+1)a_n && \text{donc, par hypothèse de récurrence :} \\ &= (2n+1) \frac{(2n)!}{2^n n!} && \text{soit encore :} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)} && \text{et donc :} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, si la propriété est vérifiée au rang n , elle l'est également au rang $n+1$.

- On peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

2) a) Si $E = \{a\}$, seule la partition $\{\{a\}\}$ convient. D'où :

Partitions et involutions

$$b_1 = 1$$

Si $E = \{a, b\}$, seules les partitions $\{\{a, b\}\}$ et $\{\{a\}, \{b\}\}$ conviennent, d'où :

$$b_2 = 2$$

Si $E = \{a, b, c\}$, seules les partitions :

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{b, c\}, \{a\}\}$, conviennent, d'où :

$$b_3 = 4$$

Si $E = \{a, b, c, d\}$, seules les partitions

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b\}, \{c\}\}$

$\{\{b, c\}, \{a\}, \{d\}\}$, $\{\{b, d\}, \{a\}, \{c\}\}$, $\{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, $\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$
conviennent, d'où :

$$b_4 = 10$$

b) Soit B_m l'ensemble des partitions d'un ensemble à m éléments, $B_{m,k}$ l'ensemble des partitions d'un ensemble à m éléments dont $2k$ éléments sont en paires ($i \in [0, p]$). On a : $B_m = \bigcup_{k=0}^p B_{m,k}$

D'où, l'union étant disjointe :

$$\text{Card } B_m = \sum_{k=0}^p \text{card } B_{m,k}$$

Or :

- $\text{Card } B_m = b_m$
- $\text{card } B_{m,k} = C_m^{2k} a_k$, (on choisit les $2k$ éléments qui sont en paires puis on effectue une partition en paires de cet ensemble).

D'où :

$$B_m = \sum_{k=0}^p C_m^{2k} a_k$$

Et comme $m=2p$:

Partitions et involutions

$$b_{2p} = \sum_{k=0}^p C_{2p}^{2k} a_k$$

D'après 1.d, on a donc :

$$b_{2p} = \sum_{k=0}^p C_{2p}^{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!},$$

D'où :

$$b_{2p} = \sum_{k=0}^p \frac{(2p)!}{(2p-2k)! 2^k k!}$$

c) De même, on obtient :

$$b_{2p+1} = \sum_{k=0}^p C_{2p+1}^{2k} a_k$$

Soit :

$$b_{2p+1} = \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1)!}{(2p+1-2k)! 2^k k!}$$

d) Soient a un élément de l'ensemble E dont on effectue une partition, C_m l'ensemble des partitions de E telles que a soit en singleton, D_m l'ensemble des partitions de E telles que a soit dans une paire. On a :

$$B_m = C_m \cup D_m \quad \text{d'où (union disjointe) :}$$

$$\text{Card}B_m = \text{Card}C_m + \text{Card}D_m$$

Or, on a :

$$\text{Card}B_m = b_m \quad \text{et (en effectuant une partition de l'ensemble des } m-1 \text{ éléments restants) :}$$

$$\text{Card}C_m = b_{m-1} \quad \text{et :}$$

$$\text{Card}D_m = (m-1)b_{m-2}$$

(on choisit l'élément qui forme la paire avec a puis on effectue une partition de l'ensemble des $m-2$ éléments restants)

D'où le résultat :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}$$

- 3) Construire une involution de E sur lui-même revient à effectuer une partition de E en paires et/ou en singletons. En effet, tout élément a de E vérifie soit $f(a)=a$, et donc $(f \circ f)(a) = a$, soit $f(a)=b$ (et donc $f(b)=a$ nécessairement). Ainsi, il s'agit de répartir les éléments de E en singletons (ceux qui sont leur propre image) et/ou en paires (ceux qui sont l'image d'un autre). Ainsi :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m$$