Partitions et involutions

Enoncé

On appelle partition en paires d'un ensemble E toute partition de E constituée uniquement de paires.

Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ constituent des partitions en paires de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.

1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le nombre de partitions en paires d'un ensemble à 2n éléments. Par convention, on pose $a_0 = 1$.

a) Calculer a_1 et a_2.

b) Exprimer a_3 en fonction de a_2 (on pourra considérer un élément x d'un ensemble à 6 éléments et choisir l'élément avec lequel il forme une paire).

c) A l'aide d'un raisonnement analogue, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n.

d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

1.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on désigne par b_m le nombre de partitions en paires et/ou en singletons d'un ensemble à m éléments, c'est à dire le nombre de partitions d'un ensemble à

m éléments qui ne soient constituées que de paires et/ou de singletons. Par exemple, les ensembles $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$ et $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ constituent des partitions en paires et/ou en singletons de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Par convention, on pose : $b_0 = 1$.

a) Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b) On suppose dans cette question que $m = 2p$ $(p \in \mathbb{N}^*)$. En considérant les éléments qui constituent les paires lors de la partition d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_{2p} = \sum_{i=0}^{p} C_{2p}^{2i} a_i.$$

En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, une expression de b_{2p} en fonction de p.

c) Etablir une formule analogue dans le cas où $m = 2p + 1$ $(p \in \mathbb{N})$.

d) Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2. En considérant un élément particulier d'un ensemble à m éléments, établir que :

$$b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}.$$

1.3 On appelle involution d'un ensemble E toute bijection f de E sur E telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. *On note alors, pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, T_m *le nombre d'involutions d'un ensemble à m éléments. Etablir que :*

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1) ***a)*** *Si E contient deux éléments a et b, il y a une unique partition en paire de E :* $\{\{a,b\}\}$*. Donc :*

$$\boxed{a_1 = 1}$$

Dénombrons les partitions en paire de E avec : $E = \{a,b,c,d\}$. Les éléments étant répartis en paires, les seules possibilités sont : $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$, $\{\{a,c\},\{b,d\}\}$, $\{\{a,d\},\{b,c\}\}$. d'où :

$$\boxed{a_2 = 3}$$

b) Posons $A_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ et considérons l'élément x_1. Pour effectuer une partition en paires de A_3, il faut, et il suffit de :

- choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est à dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
- effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les 4 éléments restants.

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Cet ensemble étant constitué de 5 éléments, il y a donc 5 choix du binôme de x_1. De plus, par définition de a_2, on sait qu'il existe a_2 partitions en paires de l'ensemble constitué par les 4 éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe 5 a_2 partitions en paires de A_3, et donc, d'après la définition de a_3 :

$$\boxed{a_3 = 5a_2}$$

c) Soient n un entier naturel non nul, A_{n+1} un ensemble à 2n+2 éléments : $A_{n+1} = \{x_k, k \in [\![1, 2n+2]\!]\}$ et considérons l'élément x_1. Pour effectuer une partition en paires de A_{n+1}, il faut, et il suffit de :

- choisir d'abord le binôme de x_1 (c'est à dire l'élément associé à x_1 dans une paire), puis :
- effectuer une partition en paires de l'ensemble constitué par les 2n éléments restants.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or, le binôme de x_1 se trouve dans l'ensemble $\{x_k, k \in [\![2, 2n+2]\!]\}$. Cet ensemble étant de cardinal 2n+1, il y a donc 2n+1 possibilités pour choisir le binôme de x_1. De plus, par définition de a_n, on sait qu'il existe a_n partitions en paires de l'ensemble constitué par les 2n éléments restants.

On en déduit alors qu'il existe $(2n+1)a_n$ partitions en paires de A_{n+1}, et donc, par définition de a_{n+1} :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = (2n+1)a_n}$$

d) Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

- Au rang n=1. Comme il y a une seule partition en paires d'un ensemble à deux éléments, on a : $a_1 = 1 = \dfrac{2!}{2^1 1!}$, donc la propriété est vérifiée au rang n=1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$a_{n+1} = (2n+1)a_n$ donc, par hypothèse de récurrence :

$= (2n+1)\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ soit encore :

$= \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)(2^n n!)}$ et donc :

$= \dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!}$.

Ainsi, si la propriété est vérifiée au rang n, elle l'est également au rang n+1.

- On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}}$$

2) a) *Si* $E = \{a\}$*, seule la partition* $\{\{a\}\}$ *convient. D'où :*

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\boxed{b_1 = 1}$$

Si $E = \{a, b\}$, seules les partitions $\{\{a, b\}\}$ et $\{\{a\}, \{b\}\}$ conviennent, d'où :

$$\boxed{b_2 = 2}$$

Si $E = \{a, b, c\}$, seules les partitions :
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a,b\}, \{c\}\}$, $\{\{a,c\}, \{b\}\}$, $\{\{b,c\}, \{a\}\}$, conviennent, d'où :

$$\boxed{b_3 = 4}$$

Si $E = \{a, b, c, d\}$, seules les partitions
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\{\{a,b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\{\{a,c\}, \{b\}, \{d\}\}$, $\{\{a,d\}, \{b\}, \{c\}\}$
$\{\{b,c\}, \{a\}, \{d\}\}$, $\{\{b,d\}, \{a\}, \{c\}\}$, $\{\{c,d\}, \{a\}, \{b\}\}$, $\{\{a,b\}, \{c,d\}\}$, $\{\{a,c\}, \{b,d\}\}$, $\{\{a,d\}, \{b,c\}\}$
conviennent, d'où :

$$\boxed{b_4 = 10}$$

b) Soit B_m l'ensemble des partitions d'un ensemble à m éléments, $B_{m,k}$ l'ensemble des partitions d'un ensemble à m éléments dont $2k$ éléments sont en paires ($i \in [\![0, p]\!]$). On a : $B_m = \bigcup_{k=0}^{p} B_{m,k}$

D'où, l'union étant disjointe :

$$\text{Card } B_m = \sum_{k=0}^{p} \text{card } B_{m,k}$$

Or :

- $\text{Card } B_m = b_m$
- $\text{card } B_{m,k} = C_m^{2k}.a_k$, (on choisit les 2k éléments qui sont en paires puis on effectue une partition en paires de cet ensemble).

D'où :

$$B_m = \sum_{k=0}^{p} C_m^{2k} a_k$$

Et comme $m = 2p$:

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\boxed{b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p}^{2k} a_k}$$

D'après 1.d, on a donc :

$$b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p}^{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!},$$

D'où :

$$\boxed{b_{2p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{(2p-2k)!\,2^k k!}}$$

c) De même, on obtient :

$$b_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k} a_k$$

Soit :

$$\boxed{b_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{(2p+1)!}{(2p+1-2k)!\,2^k k!}}$$

d) Soient a un élément de l'ensemble E dont on effectue une partition, C_m l'ensemble des partitions de E telles que a soit en singleton, D_m l'ensemble des partitions de E telles que a soit dans une paire. On a :

$B_m = C_m \cup D_m$ d'où (union disjointe) :

$\mathrm{Card}B_m = \mathrm{Card}C_m + \mathrm{Card}D_m$

Or, on a :

$\mathrm{Card}B_m = b_m$ et (en effectuant une partition de l'ensemble des m-1 éléments restants) :

$\mathrm{Card}C_m = b_{m-1}$ et :

$\mathrm{Card}D_m = (m-1)b_{m-2}$

(on choisit l'élément qui forme la paire avec a puis on effectue une partition de l'ensemble des m-2 éléments restants)

D'où le résultat :

$$\boxed{b_m = b_{m-1} + (m-1)b_{m-2}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) Construire une involution de E sur lui-même revient à effectuer une partition de E en paires et/ou en singletons. En effet, tout élément a de E vérifie soit f(a)=a, et donc $(f \circ f)(a) = a$, soit f(a)=b (et donc f(b)=a nécessairement). Ainsi, il s'agit de répartir les éléments de E en singletons (ceux qui sont leur propre image) et/ou en paires (ceux qui sont l'image d'un autre). Ainsi :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, T_m = b_m}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021