

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées:

Une règle graduée.

Une calculatrice de poche pouvant être programmable et lou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE 1

Soient a, b, c trois réels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer : $M^2 = 3M$.
b. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0, 3\}$.
2. a. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.
b. La matrice M est-elle diagonalisable ?

On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?
b. Vérifier : $M = PDP^{-1}$.
4. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$.
5. Montrer que l'ensemble des matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} .

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

- A.
1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.
 2. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{array} \right. \text{ et établir : } \left\{ \begin{array}{l} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \frac{x_0}{2} \end{array} \right.$$

3. Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0) .
Est-ce un minimum ou un maximum ?

B. On note $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x}$$

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0; +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0 , et que $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.
2. Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = g(u_n)$.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0 .
4. a. Montrer : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right], |g'(x)| \leq 0,125$, où g' désigne la dérivée de g.
b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq (0,125)^{n-1} \cdot 0,5$.
c. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.
d. Montrer que $f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

EXERCICE 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition soit égale à p , $p \in]0; 1[$.

On pourra noter $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.

On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de «6» obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de «6» obtenus aux lancers du dé,

X indique le nombre de «piles» obtenus aux lancers de la pièce,

Y indique le nombre de «faces» obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z , son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / Z = n)$.
On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

$$\text{si } 0 \leq k \leq n \leq N, \text{ alors } P(X = k \text{ et } Z = n) = C_n^k C_N^n p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

$$\text{si } n > N \text{ ou } k > n, \text{ alors } P(X = k \text{ et } Z = n) = 0.$$

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}.$$

En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X, Y) .
8. En comparant les variances de Z et de $X + Y$, déterminer la covariance du couple (X, Y) .

Exercice 1

1) a) On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc :}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \frac{3a}{b} & \frac{3a}{c} \\ \frac{3b}{a} & 3 & \frac{3b}{c} \\ \frac{3c}{a} & \frac{3c}{b} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{soit finalement :}$$

$$M^2 = 3M$$

b) Soit λ une valeur propre de M , et X un vecteur propre non nul de M associé à la valeur propre λ . On a :

$MX = \lambda X$ donc, en multipliant à gauche par M :

$M^2 X = M(\lambda X)$ donc, comme $MX = \lambda X$:

$\lambda^2 X = \lambda(\lambda X)$ d'où, comme, d'après le résultat précédent, $M^2 X = 3MX = 3\lambda X$:

$\lambda^2 X = 3\lambda X$ soit encore :

$(\lambda^2 - 3\lambda)X = 0$ d'où, comme $X \neq 0$:

$(\lambda^2 - 3\lambda) = 0$.

On peut alors conclure :

$$\text{L'ensemble des valeurs propres de } M \text{ est inclus dans } \{0, 3\}$$

2) a) $\lambda \neq 0$ est valeur propre de M si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul tel que $MX = \lambda X$. Or, on a :

$$MX = \lambda X \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} X = \lambda X \quad \text{donc } (L_2 - \frac{b}{a} L_1 \text{ et } L_3 - \frac{c}{a} L_1) :$$

Exercice 1

$$MX = 0 \quad \begin{matrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = 0 \quad \text{soit, en posant } X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} :$$

$$x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$bcx = -acy - abz \quad \text{soit finalement :}$$

$$X \text{ Vect} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} .$$

Ainsi, 0 est valeur propre de M, de sous-espace propre associé $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$.

* 3 est valeur propre de M si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul tel que $(M - 3I)X = 0$. Or, on a :

$$(M - 3I)X = 0 \quad \begin{matrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -2 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -2 \end{matrix} X = 0 \quad \text{donc } (L_2 \quad -2L_2 - \frac{b}{a}L_1 \text{ et } L_3 \quad -2L_3 - \frac{c}{a}L_1) :$$

$$\begin{matrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 3 & -\frac{3b}{c} \\ 0 & -\frac{3c}{b} & 3 \end{matrix} X = 0 \quad \text{d'où } (L_3 \quad L_3 - \frac{c}{b}L_2) :$$

$$\begin{matrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 3 & -\frac{3b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} X = 0 \quad \text{soit, en posant } X = \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} :$$

$$\begin{aligned} -2x + \frac{a}{b}y + \frac{a}{c}z &= 0 \\ 3y - \frac{3b}{c}z &= 0 \end{aligned} \quad \text{soit encore :}$$

Exercice 1

$(M - 3I)X = 0$ $2bcx = acy + abz$ soit finalement :
 $cy = bz$

$$X = \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

Ainsi, 3 est valeur propre de M, de sous-espace propre associé $E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On peut finalement conclure :

0 et 3 sont valeurs propres de M, de sous-espaces propres associés respectifs $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$, 0 et $E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

b) Comme $\dim E_0 + \dim E_3 = 3$ et comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, on peut alors conclure :

M est diagonalisable

3) a) * On a :

$$PQ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix} \quad \text{donc :}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{soit finalement :}$$

PQ = I

* D'après le résultat de la question précédente, on peut également conclure :

P est inversible, d'inverse Q

b) D'après le résultat de la question 2a, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans une base constituée de vecteurs propres de M. On peut donc conclure :

M = PDP⁻¹

Exercice 1

4) Soit Y un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, écrit sous la forme $(y_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$. On a :

$$DY - YD = 3Y \quad \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & 3 & 0 & 0 & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & -y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & 0 & 0 & 0 & = 3 & y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & 0 & 0 & 0 & y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{matrix} \quad \text{i.e. :}$$

$$\begin{matrix} 3y_{1,1} & 3y_{1,2} & 3y_{1,3} & 3y_{1,1} & 0 & 0 & 3y_{1,1} & 3y_{1,2} & 3y_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & -3y_{2,1} & 0 & 0 & = 3y_{2,1} & 3y_{2,2} & 3y_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 3y_{3,1} & 0 & 0 & 3y_{3,1} & 3y_{3,2} & 3y_{3,3} \end{matrix} \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{matrix} 3y_{1,1} & 0 & 0 \\ 6y_{2,1} & 3y_{2,2} & 3y_{2,3} \\ 6y_{3,1} & 3y_{3,2} & 3y_{3,3} \end{matrix} = 0 \quad \text{soit finalement :}$$

$$\begin{matrix} 0 & y_{1,2} & y_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} = 0.$$

On peut finalement conclure :

L'ensemble des matrices Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$ est l'ensemble Vect $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $M = PDP^{-1}$ (cf question 3b), on a :

$$MX - XM = 3X \quad PDP^{-1}X - XPDP^{-1} = 3X \quad \text{donc, en multipliant par } P^{-1} \text{ à gauche et par } P \text{ à droite, ces matrices étant inversibles :}$$

$$DP^{-1}XP - P^{-1}XPD = 3P^{-1}XP \quad \text{donc, en posant } Y = P^{-1}XP \text{ (soit } X = PYP^{-1}) :$$

$$DY - YD = 3Y \quad \text{d'où, comme } X = PYP^{-1} :$$

$$X \text{ Vect } P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} .$$

Exercice 1

La famille $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ étant libre et les matrices P et P^{-1} étant inversibles, la famille

$P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$ est également libre, et l'on peut donc conclure :

L'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R}

Exercice 2

Exercice 2

A. 1) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $x \in \mathbb{R}, h(x) = e^{-x} - x$. h est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , et on a :

$$x \in \mathbb{R}, h'(x) = -(e^{-x} + 1) \quad \text{donc :}$$

$$< 0.$$

Ainsi, h est continue et strictement décroissante sur \mathbb{R} donc, d'après le théorème de la bijection, réalise une bijection de \mathbb{R} sur $h(\mathbb{R})$ qui est un intervalle. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$, f réalise donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Ainsi, comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , et l'on peut conclure :

L'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule dans \mathbb{R}

2) f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 comme somme de fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , et on a :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{aligned} \frac{f}{x}(x, y) &= 2x - 2y - e^{-x} \\ \frac{f}{y}(x, y) &= -2x + 4y \end{aligned} \quad \text{donc, pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{x}(x, y) = 0 & \quad 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ \frac{f}{y}(x, y) = 0 & \quad -2x + 4y = 0 \end{aligned} \quad \text{soit encore :}$$

$$\begin{aligned} x - e^{-x} &= 0 \\ y &= \frac{x}{2} \end{aligned} .$$

L'équation $x - e^{-x} = 0$ admettant une unique solution dans \mathbb{R} , on peut désormais conclure :

Il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{f}{x}(x, y) = 0$ et celui-ci vérifie : $x_0 - e^{-x_0} = 0$
 $\frac{f}{y}(x, y) = 0$ $y_0 = \frac{x_0}{2}$

3) * f étant de classe C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 , elle ne peut admettre d'extremum qu'en un point (x, y) annulant ses dérivées partielles d'ordre 1. Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, f ne peut admettre d'extremum qu'en (x_0, y_0) . De plus, on a :

Exercice 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 \quad \text{donc, en utilisant les notations de Monge en } (x_0, y_0) :$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

$$r = 2 + e^{-x_0}$$

$$s = -2$$

$$t = 4$$

On a donc : $rt - s^2 = 4(1 + e^{-x_0})$, donc $rt - s^2 > 0$. On peut donc conclure :

f admet un extremum en (x_0, y_0)

* Comme $r > 0$, on peut également conclure :

f admet un minimum en (x_0, y_0)

B. 1) * Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$g(x) = x \quad \frac{1+x}{1+e^x} = x \quad \text{soit encore :}$$

$$1+x = x + xe^x \quad \text{i.e. :}$$

$$xe^x = 1 \quad \text{donc, comme } e^x > 0 :$$

$$x = e^{-x}.$$

D'après le résultat de la question A.1, on peut donc conclure :

L'équation $g(x) = x$ admet x_0 pour unique solution sur \mathbb{R}

* On a :

$$g(1) - 1 = \frac{2}{1+e} - 1 \quad \text{donc :}$$

$$= \frac{1-e}{1+e} \quad \text{d'où, comme } e > 1 :$$

$$< 0 \quad \text{et :}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2(1+\sqrt{e})} - \frac{1}{2} \quad \text{donc :}$$

Exercice 2

$g \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{e}}{2(1 + \sqrt{e})}$ d'où, comme $e < 4$:

> 0 .

Ainsi, la fonction $x \mapsto g(x) - x$ change de signe sur $\frac{1}{2}, 1$. Comme elle y est continue, on peut donc écrire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'elle admet un zéro sur $\frac{1}{2}, 1$. Comme elle admet un unique zéro sur \mathbb{R} , on peut finalement conclure :

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1$$

N.B. : On pouvait également démontrer ce résultat à l'aide de la fonction h étudiée dans la question A.1 (ce qui était d'ailleurs plus rapide).

2) * g est de classe C¹ sur \mathbb{R}^+ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C¹ sur \mathbb{R}^+ , et on a :

$x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = \frac{1 + e^x \cdot (1+x)e^x}{(1 + e^x)^2}$ soit :

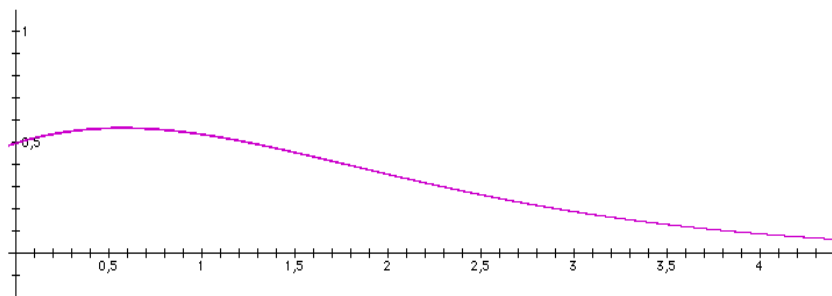
$= \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}$ et donc :

$= \frac{e^x(e^x - x)}{(1 + e^x)^2}$.

x_0 est donc l'unique solution de l'équation $g'(x) = 0$, et l'on peut donc dresser le tableau de variations de g sur \mathbb{R}^+ (avec : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, par croissances comparées) :

| | | | |
|---------|---------------|-------|-----------|
| x | 0 | x_0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + | 0 | - |
| g | $\frac{1}{2}$ | x_0 | 0 |

* On peut alors tracer la courbe représentative de g sur \mathbb{R}^+ :



Exercice 2

3) * * Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n) : "0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq x_0"$ est vraie.

• Au rang $n = 0$. Comme $u_0 = 0$, on a $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$, et donc, comme $x_0 \geq \frac{1}{2}$:

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ soit vraie. g étant croissante sur $[0, x_0]$, on peut alors écrire :

$$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(x_0) \quad \text{d'où, comme } g(0) = 0:$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq x_0.$$

Ainsi, si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ l'est également.

• On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq x_0$.

* Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n.$$

On peut alors conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

* La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée (par x_0), elle converge vers une limite ℓ positive ou nulle. De plus, g étant continue sur \mathbb{R}^+ , ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. x_0 étant l'unique solution de cette équation, on peut finalement conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0

4) a) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}.$$

g' est dérivable sur \mathbb{R}^+ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ , et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g''(x) = \frac{-(e^x + xe^x)(1 + e^x)^2 - (1 - xe^x)2e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} \quad \text{soit :}$$

$$= -e^x \frac{(1 + x)(1 + e^x) + 2(1 - xe^x)}{(1 + e^x)^3} \quad \text{donc :}$$

Exercice 2

$x \in \mathbb{R}^+, g''(x) = -e^x \frac{3+x+(1-x)e^x}{(1+e^x)^3}$ d'où :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], g''(x) < 0$.

Ainsi, g' est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On a donc :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], g'(1) \leq g'(x) \leq g'\left(\frac{1}{2}\right)$ i.e. :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \frac{1-e}{(1+e)^2} \leq g'(x) \leq \frac{2-\sqrt{e}}{2(1+\sqrt{e})^2}$ soit, après calcul :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], -0,1242 \leq g'(x) \leq 0,025$ soit finalement :

| |
|---|
| $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], g'(x) \leq \frac{1}{8}$ |
|---|

b) * g étant continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on peut alors écrire, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |g(x) - g(x_0)| \leq \frac{1}{8} |x - x_0|$ soit encore, comme $g(x_0) = x_0$:

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |g(x) - x_0| \leq \frac{1}{8} |x - x_0|$ (1).

Or, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq u_1$, donc, comme $u_1 = \frac{1}{2}$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{2}$.

D'après (1), on a donc, comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(u_n) = u_{n+1}$:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{8} |u_n - x_0|$ (2).

* Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$.

• Au rang $n = 1$. Comme $\frac{1}{8^0} = 1$, la propriété est bien vérifiée au rang $n = 0$.

Exercice 2

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$. D'après (2), on a :

$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{8} |u_n - x_0|$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{1}{8^n} |u_1 - x_0|.$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

• On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$.

* Comme u_1 et x_0 appartiennent à $[\frac{1}{2}, 1]$, on a également : $|u_1 - x_0| \leq \frac{1}{2}$. On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2 \cdot 8^{n-1}}$$

c) D'après le résultat de la question précédente, pour que u_n constitue une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près, il suffit que n vérifie : $\frac{1}{2 \cdot 8^{n-1}} \leq 10^{-8}$. Or, on a :

$$\frac{1}{2 \cdot 8^{n-1}} \leq 10^{-8} \iff \frac{10^8}{2} \leq 8^{n-1} \quad \text{donc, en composant par } \ln, \text{ croissante sur } \mathbb{R}_+^* :$$

$$8 \ln 10 - \ln 2 \leq (n - 1) \ln 8 \quad \text{d'où :}$$

$$n \geq \frac{8 \ln 10 - \ln 2}{\ln 8} + 1 \quad \text{soit, après calcul (effectué à la calculatrice) :}$$

$$n \geq 9,525.$$

Ainsi, u_{10} constitue une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près. On peut donc conclure :

$$x_0 = 0,56714329 \pm 10^{-8}$$

d) * On a :

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 - 2x_0y_0 + 2y_0^2 + e^{-x_0} \quad \text{d'où, comme } y_0 = \frac{x_0}{2} \text{ et } x_0 = e^{-x_0} :$$

$$f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$$

Exercice 2

* D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire, après calculs :

$$f(x_0, y_0) = 0,7279690 \pm 10^{-7}$$

Exercice 3

Exercice 3

1) Z est la variable aléatoire égale au nombre de succès (obtenir un "6" à un lancer donné) dans une suite de N épreuves indépendantes à deux issues de même probabilité de succès égale à $\frac{1}{6}$. On peut donc conclure :

| |
|--|
| Z suit une loi binomiale de paramètres N et $\frac{1}{6}$, et on a : $E(Z) = \frac{N}{6}$ et $V(Z) = \frac{5N}{36}$ |
|--|

2) On suppose que $n \in [0, N]$ (en effet, si n est strictement supérieur à N, l'événement $[Z = n]$ est impossible). Deux cas se présentent alors :

- si $k > n$. Si l'événement $[Z = n]$ est réalisé, on effectue n lancers de la pièce. Le nombre de "piles" obtenu est donc inférieur ou égal à n. On a donc :

$$k \in [n + 1, +\infty[, p(X = k / Z = n) = 0,$$

- si $k \leq n$. Sachant que l'événement $[Z = n]$ est réalisé, la variable aléatoire X indique le nombre de succès (obtenir pile) dans une suite de n épreuves indépendantes à deux issues de même probabilité de succès égale à p. Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $Z = n$ est la loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$$k \in [0, n], p(X = k / Z = n) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

On peut alors conclure :

| |
|--|
| $k \in [n + 1, +\infty[, p(X = k / Z = n) = 0$ $k \in \{0, \dots, n\} , p(X = k / Z = n) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ |
|--|

NB : si $n > N$, la probabilité conditionnelle envisagée n'a pas de sens.

3) * On a :

$n \in [0, N], k \in [0, n], p([X = k] \cap [Z = n]) = p(Z = n) p(X=k/Z=n)$ donc, d'après les questions 1 et 2 :

| |
|--|
| Si $0 \leq k \leq n \leq N, p([X = k] \cap [Z = n]) = C_n^k C_N^n p^k (1 - p)^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ |
|--|

* Deux cas se présentent :

- si $n > N$, l'événement $[Z = n]$ est impossible, donc :

Exercice 3

$$p([X = k] \mid [Z = n]) = 0,$$

• si $n \leq N$ et si $k > n$, on a alors, d'après le résultat de la question précédente : $p(X=k/Z=n) = 0$, et donc :

$$p([X = k] \mid [Z = n]) = 0.$$

On peut alors conclure :

$$\text{Si } n > N \text{ ou } k > n, p([X = k] \mid [Z = n]) = 0$$

4) Comme Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$, on a :

$$p(X = 0) = \sum_{n=0}^N p([X = 0] \mid [Z = n]) \quad \text{donc, d'après le résultat de la question précédente :}$$

$$= \sum_{n=0}^N C_n^0 C_N^n p^0 (1-p)^{n-0} \frac{5}{6}^{N-n} \frac{1}{6}^n \quad \text{soit encore :}$$

$$= \sum_{n=0}^N C_N^n \frac{5}{6}^{N-n} \frac{1-p}{6}^n \quad \text{d'où, d'après la formule du binôme de Newton :}$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1-p}{6}^N \quad \text{soit finalement :}$$

$$p(X = 0) = 1 - \frac{p}{6}^N$$

5) * On a :

$$n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad C_n^k C_N^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{N!}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!(N-n)!} \quad \text{donc, en multipliant et en divisant}$$

par $(N-k)!$:

$$= \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!} \quad \text{soit finalement :}$$

$$n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}$$

Exercice 3

* Comme Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$, X prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p(X = k) &= \sum_{n=0}^N p([X = k] \cap [Z = n]) && \text{donc, d'après le résultat de la question 3 :} \\
 &= \sum_{n=k}^N C_N^k C_N^n p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n && \text{d'où, d'après le résultat précédent :} \\
 &= C_N^k p^k \sum_{n=k}^N C_{N-k}^{n-k} (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n && \text{donc, en effectuant le changement} \\
 & && \text{d'indice } n' = n - k : \\
 &= C_N^k p^k \sum_{n=0}^{N-k} C_{N-k}^n (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k} && \text{soit encore :} \\
 &= C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \sum_{n=0}^{N-k} C_{N-k}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n && \text{d'où, d'après la formule du binôme} \\
 & && \text{de Newton :} \\
 &= C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6} + \frac{1-p}{6}\right)^{N-k} && \text{soit finalement :}
 \end{aligned}$$

$$k \in \llbracket 0, N \rrbracket, p(X = k) = C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

6) * D'après le résultat de la question précédente, on peut alors conclure :

$$X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } N \text{ et } \frac{p}{6}$$

* En substituant Y à X et $1 - p$ à p dans le raisonnement précédent, on peut également conclure :

$$Y \text{ suit la loi binomiale de paramètres } N \text{ et } \frac{1-p}{6}$$

7) * D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$p(X = N) p(Y = N) = \left(\frac{p}{6}\right)^N \left(\frac{1-p}{6}\right)^N.$$

De plus, comme $X + Y = Z$, et comme Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$, on a :

$$p([X = N] \cap [Y = N]) = 0.$$

Exercice 3

On peut donc conclure :

X et Y ne sont pas indépendantes

* Comme $X+Y=Z$, on a :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = P([X = i] \cap [Z = i + j]).$$

D'après le résultat des questions 1 et 2, on peut alors conclure

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} C_{i+j}^i C_N^{i+j} p^i (1-p)^j \frac{5}{6}^{N-i-j} \frac{1}{6}^{i+j} & \text{si } i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

8) Comme $Z = X + Y$, on a :

$$V(X + Y) = V(Z) \quad \text{soit :}$$

$$V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y) = V(Z) \quad \text{donc :}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{V(Z) - V(X) - V(Y)}{2} \quad \text{donc, d'après le résultat des questions 1 et 6 :}$$

$$= \frac{\frac{5N}{36} - \frac{Np(6-p)}{36} - \frac{N(1-p)(5+p)}{36}}{2} \quad \text{soit, après simplifications :}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{Np(1-p)}{36}$$