Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE 1

Soient a, b, c trois réels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer : $M^2 = 3M$.

   b. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0, 3\}$.

2. a. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.

   b. La matrice M est-elle diagonalisable ?

On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}.$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3. a. Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?

b. Vérifier : $M = PDP^{-1}$.

4. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$.

5. Montrer que l'ensemble des matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

A. 1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

2. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$, et établir : $$\begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}$$.

3. Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0).
Est-ce un minimum ou un maximum ?

B. On note $g : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0 ; +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0, et que $\dfrac{1}{2} < x_0 < 1$.

2. Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0.

4. a. Montrer : $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $|g'(x)| \leq 0{,}125$, où g' désigne la dérivée de g.

b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_0| \leq (0{,}125)^{n-1} \cdot 0{,}5$.

c. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.

d. Montrer que $f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition soit égale à p, $p \in]0;1[$.
On pourra noter $q = 1-p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de «6» obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de «6» obtenus aux lancers du dé,
X indique le nombre de «piles» obtenus aux lancers de la pièce,
Y indique le nombre de «faces» obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, X + Y = Z et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / Z = n)$.
On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.

3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

si $0 \leq k \leq n \leq N$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = C_n^k C_N^n p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

si $n > N$ ou $k > n$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$.

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.

5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

$$C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}.$$

En déduire la probabilité $P(X = k)$.

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
Déterminer la loi du couple (X, Y).

8. En comparant les variances de Z et de X + Y, déterminer la covariance du couple (X, Y).

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

1) a) On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}$$ donc :

$$= \begin{pmatrix} 3 & \frac{3a}{b} & \frac{3a}{c} \\ \frac{3b}{a} & 3 & \frac{3b}{c} \\ \frac{3c}{a} & \frac{3c}{b} & 3 \end{pmatrix}$$ soit finalement :

$$\boxed{M^2 = 3M}$$

b) Soit λ une valeur propre de M, et X un vecteur propre non nul de M associé à la valeur propre λ. On a :

$MX = \lambda X$ donc, en multipliant à gauche par M :

$M^2 X = \lambda MX$ donc, comme $MX = \lambda X$:

$= \lambda^2 X$ d'où, comme, d'après le résultat précédent, $M^2 X = 3MX = 3\lambda X$:

$\lambda^2 X = 3\lambda X$ soit encore :

$\lambda(\lambda - 3)X = 0$ d'où, comme $X \neq 0$:

$\lambda(\lambda - 3) = 0$.

On peut alors conclure :

L'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans {0, 3}

2) a) 0 est valeur propre de M si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul tel que $MX = 0$. Or, on a :

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} X = 0$$ donc ($L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a} L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c}{a} L_1$) :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$ soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$\Leftrightarrow x + \frac{a}{b} y + \frac{a}{c} z = 0$ d'où :

$\Leftrightarrow bcx = -acy - abz$ soit finalement :

$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ a \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, 0 est valeur propre de M, de sous-espace propre associé $E_0 = Vect\left(\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ a \end{pmatrix}\right)$

• 3 est valeur propre de M si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul tel que (M - 3I)X = 0. Or, on a :

$(M - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -2 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -2 \end{pmatrix} X = 0$ donc $(L_2 \leftarrow -2L_2 - \frac{b}{a} L_1$ et $L_3 \leftarrow -2L_3 - \frac{c}{a} L_1)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 3 & -\frac{3b}{c} \\ 0 & -\frac{3c}{b} & 3 \end{pmatrix} X = 0$ d'où $(L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c}{b} L_2)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 3 & -\frac{3b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$ soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \frac{a}{b} y + \frac{a}{c} z = 0 \\ 3y - \frac{3b}{c} z = 0 \end{cases}$ soit encore :

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

$(M - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2bcx = acy + abz \\ cy = bz \end{cases}$ soit finalement :

$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi, 3 est valeur propre de M, de sous-espace propre associé $E_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On peut finalement conclure :

0 et 3 sont valeurs propres de M, de sous-espaces propres associés respectifs $E_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$ et $E_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

b) Comme $\dim E_0 + \dim E_3 = 3$ et comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, on peut alors conclure :

M est diagonalisable

3) a) • On a :

$$PQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}$$ donc :

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ soit finalement :

PQ = I

• D'après le résultat de la question précédente, on peut également conclure :

P est inversible, d'inverse Q

b) D'après le résultat de la question 2a, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans une base constituée de vecteurs propres de M. On peut donc conclure :

$M = PDP^{-1}$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

4) Soit Y un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, écrit sous la forme $(y_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$. On a :

$$DY - YD = 3Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{1,1}&y_{1,2}&y_{1,3}\\y_{2,1}&y_{2,2}&y_{2,3}\\y_{3,1}&y_{3,2}&y_{3,3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}y_{1,1}&y_{1,2}&y_{1,3}\\y_{2,1}&y_{2,2}&y_{2,3}\\y_{3,1}&y_{3,2}&y_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}y_{1,1}&y_{1,2}&y_{1,3}\\y_{2,1}&y_{2,2}&y_{2,3}\\y_{3,1}&y_{3,2}&y_{3,3}\end{pmatrix} \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3y_{1,1}&0&0\\3y_{2,1}&0&0\\3y_{3,1}&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3y_{1,1}&3y_{1,2}&3y_{1,3}\\3y_{2,1}&3y_{2,2}&3y_{2,3}\\3y_{3,1}&3y_{3,2}&3y_{3,3}\end{pmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3y_{1,1}&0&0\\-6y_{2,1}&-3y_{2,2}&-3y_{2,3}\\-6y_{3,1}&-3y_{3,2}&-3y_{3,3}\end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit finalement :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&y_{1,2}&y_{1,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0.$$

On peut finalement conclure :

L'ensemble des matrices Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que DY - YD = 3Y est l'ensemble $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$

5) Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $M = PDP^{-1}$ (cf question 3b), on a :

$MX - XM = 3X \Leftrightarrow PDP^{-1}X - XPDP^{-1} = 3X$ donc, en multipliant par P^{-1} à gauche et par P à droite, ces matrices étant inversibles :

$\Leftrightarrow DP^{-1}XP - P^{-1}XPD = 3P^{-1}XP$ donc, en posant $Y = P^{-1}XP$ (soit $X = PYP^{-1}$) :

$\Leftrightarrow DY - YD = 3Y$ d'où, comme $X = PYP^{-1}$:

$$\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(P\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\right)$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

La famille $\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$ étant libre et les matrices P et P^{-1} étant inversibles, la famille $\left(P\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1},P\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}\right)$ est également libre, et l'on peut donc conclure :

L'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que MX - XM = 3X est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

Exercice 2

A. 1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^{-x} - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = -(e^{-x} + 1)$ donc :

< 0.

Ainsi, h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de la bijection, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R})$ qui est un intervalle. Comme $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, et l'on peut conclure :

L'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}$

2) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y \end{cases}$$ donc, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$ soit encore :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}.$$

L'équation $x - e^{-x} = 0$ admettant une unique solution dans $\mathbb{R}$, on peut désormais conclure :

Il existe un unique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ et celui-ci vérifie : $\begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}$

3) ⋆ f étant de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, elle ne peut admettre d'extremum qu'en un point (x, y) annulant ses dérivées partielles d'ordre 1. Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, f ne peut admettre d'extremum qu'en (x_0, y_0). De plus, on a :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \end{cases}$$ donc, en utilisant les notations de Monge en (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} r = 2 + e^{-x_0} \\ s = -2 \\ t = 4 \end{cases}.$$

On a donc : $rt - s^2 = 4(1 + e^{-x_0})$, donc $rt - s^2 > 0$. On peut donc conclure :

f admet un extremum en (x_0, y_0)

- Comme $r > 0$, on peut également conclure :

f admet un minimum en (x_0, y_0)

B. 1) - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+e^x} = x$ soit encore :

$\Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x$ i.e. :

$\Leftrightarrow xe^x = 1$ donc, comme $e^x > 0$:

$\Leftrightarrow x = e^{-x}$.

D'après le résultat de la question A.1, on peut donc conclure :

L'équation $g(x) = x$ admet x_0 pour unique solution sur $\mathbb{R}$

- On a :

$g(1) - 1 = \dfrac{2}{1+e} - 1$ donc :

$= \dfrac{1-e}{1+e}$ d'où, comme $e > 1$:

< 0 et :

$g\left(\frac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2(1+\sqrt{e})} - \dfrac{1}{2}$ donc :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

$g\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{e}}{2(1+\sqrt{e})}$ d'où, comme e < 4 :

> 0.

Ainsi, la fonction $x \mapsto g(x) - x$ change de signe sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Comme elle y est continue, on peut donc écrire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'elle admet un zéro sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Comme elle admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\frac{1}{2} < x_0 < 1}$$

N.B. : On pouvait également démontrer ce résultat à l'aide de la fonction h étudiée dans la question A.1 (ce qui était d'ailleurs plus rapide).

2) • g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

$x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \frac{1+e^x-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2}$ soit :

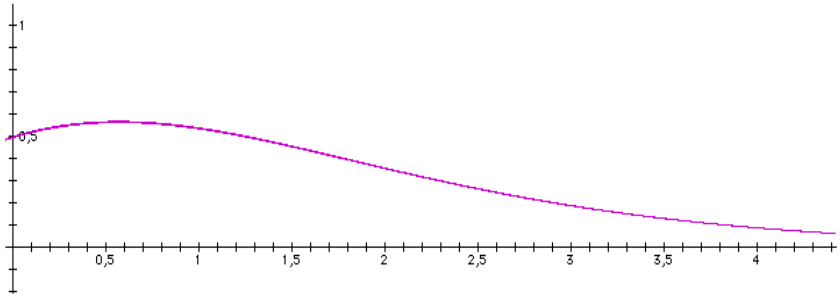
$= \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$ et donc :

$= \frac{e^x(e^{-x}-x)}{(1+e^x)^2}$.

x_0 est donc l'unique solution de l'équation $g'(x) = 0$, et l'on peut donc dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$ (avec : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, par croissances comparées) :

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
g	$\frac{1}{2}$	↗	x_0	↘	0

• On peut alors tracer la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}^+$:



 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

3) ⋆⋆ Montrons par récurrence que, pour tout n $\mathbb{N}$, la proposition P(n) : "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq x_0$" est vraie.

• Au rang n = 0. Comme $u_0 = 0$, on a $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$, et donc, comme $x_0 \geq \frac{1}{2}$:

$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq x_0$

Ainsi, P(0) est vraie.

• Soit n $\mathbb{N}$. Supposons P(n) soit vraie. g étant croissante sur $[0, x_0]$, on peut alors écrire :

$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(x_0)$ d'où, comme $g(0) \geq 0$:

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq x_0$.

Ainsi, si P(n) est vraie, P(n+1) l'est également.

• On a donc : n $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq x_0$.

⋆ Ainsi, on a :

n $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

On peut alors conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

⋆ La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée (par x_0), elle converge vers une limite ℓ positive ou nulle. De plus, g étant continue sur $\mathbb{R}^+$, ℓ est solution de l'équation g(x) = x. x_0 étant l'unique solution de cette équation, on peut finalement conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0

4) a) On a :

x $\mathbb{R}^+$, $g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}$.

g' est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

x $\mathbb{R}^+$, $g''(x) = \frac{-(e^x + xe^x)(1 + e^x)^2 - (1 - xe^x)2e^x(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4}$ soit :

$= -e^x \frac{(1 + x)(1 + e^x) + 2(1 - xe^x)}{(1 + e^x)^3}$ donc :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

$x \in \mathbb{R}^+,\ g''(x) = -e^x \dfrac{3 + x + (1-x)e^x}{(1+e^x)^3}$ d'où :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ g''(x) \leq 0.$

Ainsi, g' est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. On a donc :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ g'(1) \leq g'(x) \leq g'\left(\frac{1}{2}\right)$ i.e. :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \dfrac{1-e}{(1+e)^2} \leq g'(x) \leq \dfrac{2-\sqrt{e}}{2(1+\sqrt{e})^2}$ soit, après calcul :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ -0{,}1242 \leq g'(x) \leq 0{,}025$ soit finalement :

$$\boxed{x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \left|g'(x)\right| \leq \frac{1}{8}}$$

b) ⋆ g étant continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, on peut alors écrire, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \left|g(x) - g(x_0)\right| \leq \frac{1}{8}\left|x - x_0\right|$ soit encore, comme $g(x_0) = x_0$:

$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ \left|g(x) - x_0\right| \leq \frac{1}{8}\left|x - x_0\right|$ (1).

Or, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, on a : $n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq u_1$, donc, comme $u_1 = \frac{1}{2}$:

$n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq \frac{1}{2}$.

D'après (1), on a donc, comme : $n \in \mathbb{N}^*,\ g(u_n) = u_{n+1}$:

$n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_{n+1} - x_0\right| \leq \frac{1}{8}\left|u_n - x_0\right|$ (2).

⋆ Montrons alors par récurrence que : $n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - x_0\right| \leq \dfrac{1}{8^{n-1}}\left|u_1 - x_0\right|$.

• Au rang $n = 1$. Comme $\frac{1}{8^0} = 1$, la propriété est bien vérifiée au rang $n = 0$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$. D'après (2), on a :

$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{8} |u_n - x_0|$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$\leq \frac{1}{8^n} |u_1 - x_0|$.

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang n + 1.

• On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$.

⋆ Comme u_1 et x_0 appartiennent à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a également : $|u_1 - x_0| \leq \frac{1}{2}$. On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2.8^{n-1}}$$

c) D'après le résultat de la question précédente, pour que u_n constitue une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près, il suffit que n vérifie : $\frac{1}{2.8^{n-1}} \leq 10^{-8}$. Or, on a :

$\frac{1}{2.8^{n-1}} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{10^8}{2} \leq 8^{n-1}$ donc, en composant par ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\Leftrightarrow 8 \ln 10 - \ln 2 \leq (n-1) \ln 8$ d'où :

$\Leftrightarrow n \geq \frac{8 \ln 10 - \ln 2}{\ln 8} + 1$ soit, après calcul (effectué à la calculatrice) :

$\Leftrightarrow n \geq 9{,}525$.

Ainsi, u_{10} constitue une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près. On peut donc conclure :

$$x_0 = 0{,}56714329 \pm 10^{-8}$$

d) ⋆ On a :

$f(x_0, y_0) = {x_0}^2 - 2x_0y_0 + 2{y_0}^2 + e^{-x_0}$ d'où, comme $y_0 = \frac{x_0}{2}$ et $x_0 = e^{-x_0}$:

$$f(x_0, y_0) = \frac{{x_0}^2}{2} + x_0$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 2

- D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire, après calculs :

$$f(x_0, y_0) = 0{,}7279690 \pm 10^{-7}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 3

Exercice 3

1) Z est la variable aléatoire égale au nombre de succès (obtenir un “6” à un lancer donné) dans une suite de N épreuves indépendantes à deux issues de même probabilité de succès égale à $\frac{1}{6}$. On peut donc conclure :

$$Z \text{ suit une loi binomiale de paramètres N et } \frac{1}{6}, \text{ et on a : } E(Z) = \frac{N}{6} \text{ et } V(Z) = \frac{5N}{36}$$

2) On suppose que $n \in [\![0, N]\!]$ (en effet, si n est strictement supérieur à N, l’événement $[Z = n]$ est impossible). Deux cas se présentent alors :

• si $k > n$. Si l’événement $[Z = n]$ est réalisé, on effectue n lancers de la pièce. Le nombre de “piles” obtenu est donc inférieur ou égal à n. On a donc :

$k \in [\![n + 1, +\infty[\![$, $p(X = k / Z = n) = 0$,

• si $k \leq n$. Sachant que l’événement $[Z = n]$ est réalisé, la variable aléatoire X indique le nombre de succès (obtenir pile) dans une suite de n épreuves indépendantes à deux issues de même probabilité de succès égale à p. Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $Z = n$ est la loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$k \in [\![0, n]\!]$, $p(X = k / Z = n) = C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k}$.

On peut alors conclure :

$$n \in [\![0, N]\!], \begin{cases} k \geq n+1, \; p(X = k / Z = n) = 0 \\ k \in \{0,..,n\}, \; p(X = k / Z = n) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$$

NB : si $n > N$, la probabilité conditionnelle envisagée n'a pas de sens.

3) • On a :

$n \in [\![0, N]\!]$, $k \in [\![0, n]\!]$, $p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = p(Z = n)\, p(X=k/Z=n)$ donc, d'après les questions 1 et 2 :

$$\text{Si } 0 \leq k \leq n \leq N, \; p\left([X = k] \cap [Z = n]\right) = C_n^k \, C_N^n \, p^k (1 - p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

• Deux cas se présentent :

• si $n > N$, l’événement $[Z = n]$ est impossible, donc :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l’auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = 0$,

• si $n \leq N$ et si $k > n$, on a alors, d'après le résultat de la question précédente : $p(X=k/Z=n)= 0$, et donc :

$p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = 0$.

On peut alors conclure :

$$\text{Si } n > N \text{ ou } k > n,\ p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = 0$$

4) Comme Z prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$, on a :

$p(X = 0) = \sum_{n=0}^{N} p([X = 0] \cap [Z = n])$ donc, d'après le résultat de la question précédente :

$= \sum_{n=0}^{N} C_n^0\, C_N^n\, p^0 (1 - p)^{n-0} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ soit encore :

$= \sum_{n=0}^{N} C_N^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n$ d'où, d'après la formule du binôme de Newton :

$= \left(\frac{5}{6} + \frac{1-p}{6}\right)^N$ soit finalement :

$$p(X = 0) = \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N$$

5) • On a :

$n \in [\![0, N]\!],\ k \in [\![0, n]\!],\ C_n^k\, C_N^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{N!}{n!(N-n)!}$ soit encore :

$= \frac{N!}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!(N-n)!}$ donc, en multipliant et en divisant par $(N - k)!$:

$= \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!}$ soit finalement :

$$n \in [\![0, N]\!],\ k \in [\![0, n]\!],\ C_n^k\, C_N^n = C_N^k\, C_{N-k}^{n-k}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 3

• Comme Z prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$, X prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$. De plus, on a :

$k \in [\![0, N]\!]$, $p(X = k) = \sum_{n=0}^{N} p([X = k] \cap [Z = n])$ donc, d'après le résultat de la question 3 :

$= \sum_{n=k}^{N} C_n^k C_N^n p^k (1 - p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ d'où, d'après le résultat précédent :

$= C_N^k p^k \sum_{n=k}^{N} C_{N-k}^{n-k} (1 - p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ donc, en effectuant le changement d'indice n' = n - k :

$= C_n^k p^k \sum_{n=0}^{N-k} C_{N-k}^n (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k}$ soit encore :

$= C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \sum_{n=0}^{N-k} C_{N-k}^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n$ d'où, d'après la formule du binôme de Newton :

$= C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6} + \frac{1-p}{6}\right)^{N-k}$ soit finalement :

$$k \in [\![0, N]\!],\ p(X = k) = C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

6) • D'après le résultat de la question précédente, on peut alors conclure :

X suit la loi binomiale de paramètres N et $\frac{p}{6}$

• En substituant Y à X et 1 - p à p dans le raisonnement précédent, on peut également conclure :

Y suit la loi binomiale de paramètres N et $\frac{1-p}{6}$

7) • D'après le résultat de la question précédente, on a :

$p(X = N)\, p(Y = N) = \left(\frac{p}{6}\right)^N \left(\frac{1-p}{6}\right)^N$.

De plus, comme X + Y = Z, et comme Z prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$, on a :

$p([X = N] \cap [Y = N]) = 0$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EML 1997 - Maths III

Exercice 3

On peut donc conclure :

X et Y ne sont pas indépendantes

- Comme X+Y=Z, on a :

$(i, j) \quad \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) = p([X = i] \cap [Z = i + j])$.

D'après le résultat des questions 1 et 2, on peut alors conclure

$$(i, j) \quad \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} C_{i+j}^{i} C_N^{i+j} \, p^i (1-p)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-j} \left(\frac{1}{6}\right)^{i+j} & \text{si } i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

8) Comme Z = X + Y, on a :

$V(X + Y) = V(Z)$ soit :

$V(X) + V(Y) + 2\,cov(X, Y) = V(Z)$ donc :

$cov(X, Y) = \dfrac{V(Z) - V(X) - V(Y)}{2}$ donc, d'après le résultat des questions 1 et 6 :

$$= \frac{\frac{5N}{36} - \frac{Np(6-p)}{36} - \frac{N(1-p)(5+p)}{36}}{2}$$ soit, après simplifications :

$$cov(X, Y) = \frac{Np(1-p)}{36}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021