

Énoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2 .
2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n .

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

- 1) Dénombrer les couples de parties (A, B) de E telles que $A \cup B = E$
- 2) Dénombrer les triplets de parties (A, B, C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de $n+2$ chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

$$\text{Card } A_{n+2} = \text{Card } B_{n+2} + \text{Card } C_{n+2}$$

De plus :

$$\text{-Card } A_{n+2} = U_{n+2} \text{ (par définition)}$$

-Card $B_{n+2} = U_{n+1}$ (il y a autant de codages de $n+1$ chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de $n+2$ chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card $C_{n+2} = U_n$ (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{\text{ème}}$ position).

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

Exercice 2

1. Soient R l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, R_k l'ensemble des couples de parties (A, B) de E tels que $A \cup B = E$ et $\text{Card}(A) = k$.

$$\text{On a : } R = \bigcup_{k=0}^n R_k$$

L'union étant disjointe (une partie A donnée ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

$$\text{Card}(R) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(R_k)$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si A est une partie de cardinal k de E , pour avoir $A \cup B = E$, il faut et il suffit de choisir B de telle sorte que B soit la réunion de \bar{A} et d'une partie C de A .

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour choisir une partie A cardinal k de E et une partie B de E telles que $A \cup B = E$, il faut et il suffit de :

- choisir une partie A de cardinal k de E ($\binom{n}{k}$ possibilités),
- choisir \bar{A} (1 possibilité), et :
- choisir une partie C de A (2^k possibilités, A étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Card}(R_k) = \binom{n}{k} 2^k$, et donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \text{Card}(R) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad \text{soit d'après la formule du binôme de Newton :} \\ &= (1+2)^n \quad \text{et donc :} \\ &= 3^n \quad \text{d'où la conclusion :} \end{aligned}$$

Il y a 3^n couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$

NB : On aurait également pu montrer qu'il y a autant de couples (A, B) convenables que d'applications de E dans $\{0, 1, 2\}$ qui à tout élément de $A \cap \bar{B}$ associe 0, de $B \cap \bar{A}$ associe 1 et de $A \cap B$ associe 2.

2. Soient S l'ensemble des triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, S_k l'ensemble des triplets de parties (A, B, C) de E tels que :

$$A \cup B \cup C = E \text{ et } \text{Card}(A \cup B) = k. \text{ On a : } S = \bigcup_{k=0}^n S_k.$$

Le raisonnement combinatoire

L'union étant disjointe (pour tout couple (A, B) de parties de E , $A \cup B$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\text{Card}(S) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(S_k)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si $A \cup B$ est une partie de cardinal k de E , pour avoir : $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit que C soit la réunion de $\overline{A \cup B}$ et d'une partie D quelconque de $A \cup B$. Ainsi Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour choisir une partie $A \cup B$ de cardinal k de E et une partie C de E telles que $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit de :

- choisir la sous-partie E_k de E de cardinal k telle que $A \cup B = E_k$ (C_n^k possibilités),
- choisir A et B tels que $A \cup B = E_k$ (3^k possibilités d'après le résultat de la question précédente),
- choisir $\overline{A \cup B}$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie D de $A \cup B$ (2^k possibilités, $A \cup B$ étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{Card}(S_k) = C_n^k 3^k 2^k = C_n^k 6^k$, et donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \text{Card}(S) &= \sum_{k=0}^n C_n^k 6^k && \text{soit d'après la formule du binôme de Newton :} \\ &= (1+6)^n && \text{et donc :} \\ &= 7^n && \text{d'où la conclusion :} \end{aligned}$$

Il y a 7^n triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$