Enoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2.
2. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n.

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$

2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$\boxed{U_1 = 1}$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$\boxed{U_2 = 2}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de n+2 chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

Card A_{n+2} = Card B_{n+2} + Card C_{n+2}

De plus :

-Card $A_{n+2} = U_{n+2}$ (par définition)

-Card $B_{n+2} = U_{n+1}$ (il y a autant de codages de n+1 chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de n+2 chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card $C_{n+2} = U_n$ (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{\text{ème}}$ position).

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n}$$

Exercice 2

1. Soient R l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que A ∪ B = E et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, R_k l'ensemble des couples de parties (A, B) de E tels que A ∪ B = E et Card(A) = k.

   On a : $R = \bigcup_{k=0}^{n} R_k$

   L'union étant disjointe (une partie A donnée ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

   $$\text{Card}(R) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(R_k)$$

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si A est une partie de cardinal k de E, pour avoir A ∪ B = E, il faut et il suffit de choisir B de telle sorte que B soit la réunion de $\bar{A}$ et d'une partie C de A.

   Ainsi pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour choisir une partie A cardinal k de E et une partie B de E telles que A ∪ B = E, il faut et il suffit de :

   - choisir une partie A de cardinal k de E (C_n^k possibilités),
   - choisir $\bar{A}$ (1 possibilité), et :
   - choisir une partie C de A (2^k possibilités, A étant de cardinal k).

   On en déduit alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\text{Card}(R_k) = C_n^k 2^k$, et donc, d'après ce qui précède :

   $\text{Card}(R) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

   $= (1+2)^n$ et donc :

   $= 3^n$ d'où la conclusion :

   $$\boxed{\text{Il y a } 3^n \text{ couples (A, B) de parties de E telles que } A \cup B = E}$$

   NB : On aurait également pu montrer qu'il y a autant de couples (A, B) convenables que d'applications de E dans {0, 1, 2} qui à tout élément de $A \cap \overline{B}$ associe 0, de $B \cap \overline{A}$ associe 1 et de $A \cap B$ associe 2.

2. Soient S l'ensemble des triplets (A, B, C) de parties de E telles que A ∪ B ∪ C = E et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, S_k l'ensemble des triplets de parties (A, B, C) de E tels que :

   A ∪ B ∪ C = E et Card(A ∪ B) = k. On a : $S = \bigcup_{k=0}^{n} S_k$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

L'union étant disjointe (pour tout couple (A, B) de parties de E, $A \cup B$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\mathrm{Card}(S) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(S_k)$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si $A \cup B$ est une partie de cardinal k de E, pour avoir : $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit que C soit la réunion de $\overline{A \cup B}$ et d'une partie D quelconque de $A \cup B$. Ainsi Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour choisir une partie $A \cup B$ de cardinal k de E et une partie C de E telles que $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit de :

- choisir la sous-partie E_k de E de cardinal k telle que $A \cup B = E_k$ (C_n^k possibilités),
- choisir A et B tels que $A \cup B = E_k$ (3^k possibilités d'après le résultat de la question précédente),
- choisir $\overline{A \cup B}$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie D de $A \cup B$ (2^k possibilités, $A \cup B$ étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{Card}(S_k) = C_n^k 3^k 2^k = C_n^k 6^k$,et donc, d'après ce qui précède :

$\mathrm{Card}(S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 6^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

$= (1+6)^n$ et donc :

$= 7^n$ d'où la conclusion :

Il y a 7^n triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$

