Enoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2.
2. Exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n.

Exercice 2.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$

2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de n+2 chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

Card A_{n+2} = Card B_{n+2} + Card C_{n+2}

De plus :

-Card A_{n+2} = U_{n+2} (par définition)

-Card B_{n+2} = U_{n+1} (il y a autant de codages de n+1 chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de n+2 chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card C_{n+2} = U_n (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{ème}$ position).

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Exercice 2

1. Soient R l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que A ∪ B = E et pour tout k∈⟦0, n⟧, R_k l'ensemble des couples de parties (A, B) de E tels que A ∪ B = E et Card(A) = k.

   On a : R = $\bigcup_{k=0}^{n} R_k$

   L'union étant disjointe (une partie A donnée ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec k≠k'), on peut alors écrire :

   Card(R) = $\sum_{k=0}^{n} \text{Card}\,(R_k)$

   Pour tout k∈⟦0, n⟧, si A est une partie de cardinal k de E, pour avoir A ∪ B = E, il faut et il suffit de choisir B de telle sorte que B soit la réunion de $\bar{A}$ et d'une partie C de A.

   Ainsi pour tout k∈⟦0, n⟧, pour choisir une partie A cardinal k de E et une partie B de E telles que A ∪ B = E, il faut et il suffit de :

   - choisir une partie A de cardinal k de E (C_n^k possibilités),
   - choisir $\bar{A}$ (1 possibilité), et :
   - choisir une partie C de A (2^k possibilités, A étant de cardinal k).

   On en déduit alors : ∀k ∈ ⟦0, n⟧, Card(R_k) = $C_n^k 2^k$, et donc, d'après ce qui précède :

   Card(R) = $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

   = $(1+2)^n$ et donc :

   = 3^n d'où la conclusion :

Il y a 3^n couples (A, B) de parties de E telles que A ∪ B = E

   NB : On aurait également pu montrer qu'il y a autant de couples (A, B) convenables que d'applications de E dans {0, 1, 2} qui à tout élément de $A \cap \bar{B}$ associe 0, de $B \cap \bar{A}$ associe 1 et de A ∩ B associe 2.

2. Soient S l'ensemble des triplets (A, B, C) de parties de E telles que A ∪ B ∪ C = E et pour tout k∈ ⟦0, n⟧, S_k l'ensemble des triplets de parties (A, B, C) de E tels que :

   A ∪ B ∪ C = E et Card(A ∪ B) = k. On a : S = $\bigcup_{k=0}^{n} S_k$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

L'union étant disjointe (pour tout couple (A, B) de parties de E, A ∪ B ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec k≠k'), on peut alors écrire : Card(S) = $\sum_{k=0}^{n}$ Card(S_k).

Pour tout k∈$[\![0,n]\!]$, si A ∪ B est une partie de cardinal k de E, pour avoir : A ∪ B ∪ C = E, il faut et il suffit que C soit la réunion de $\overline{A \cup B}$ et d'une partie D quelconque de A ∪ B. Ainsi Pour tout k∈ $[\![0,n]\!]$, pour choisir une partie A ∪ B de cardinal k de E et une partie C de E telles que A ∪ B ∪ C = E , il faut et il suffit de :

- choisir la sous-partie E_k de E de cardinal k telle que A ∪ B = E_k (C_n^k possibilités),
- choisir A et B tels que A ∪ B = E_k (3^k possibilités d'après le résultat de la question précédente),
- choisir $\overline{A \cup B}$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie D de A ∪ B (2^k possibilités, A ∪ B étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, Card($S_k$) = $C_n^k 3^k 2^k = C_n^k 6^k$,et donc, d'après ce qui précède :

Card(S) = $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 6^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

= $(1+6)^n$ et donc :

= 7^n d'où la conclusion :

Il y a 7^n triplets (A, B, C) de parties de E telles que A ∪ B ∪ C = E

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021