Enoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2.
2. Exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n.

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par n murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p\geq 2$). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

On note $N_{n,p}$ le nombre de façons de repeindre les murs de la cour de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur. Prouver que :

$$N_{n+2,p} = (p-2)\, N_{n+1,p} + (p-1)\, N_{n,p}.$$

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$

2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

Montrer par récurrence que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel n non nul, le nombre de p-listes $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de parties d'un ensemble F à n éléments telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = F$ est $(2^p-1)^n$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$\boxed{U_1 = 1}$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$\boxed{U_2 = 2}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de n+2 chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

$\text{Card } A_{n+2} = \text{Card } B_{n+2} + \text{Card } C_{n+2}$

De plus :

-Card $A_{n+2} = U_{n+2}$ (par définition)

-Card $B_{n+2} = U_{n+1}$ (il y a autant de codages de n+1 chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de n+2 chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card $C_{n+2} = U_n$ (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{\text{ème}}$ position).

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n}$$

Exercice 2.

Notons :

- $A_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les n+2 murs d'une cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur,

- $B_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les n+2 murs d'une cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur et telles que le premier et le $(n+1)^{ème}$ mur soient de la même couleur,

- $C_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les n+2 murs de la cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur et telles que le premier et le $(n+1)^{ème}$ mur soient de couleurs différentes.

  On a : $A_{n+2,p} = B_{n+2,p} \cup C_{n+2,p}$

  et cette union étant disjointe : $\text{Card}(A_{n+2,p}) = \text{Card}(B_{n+2,p}) + \text{Card}(C_{n+2,p})$.

  De plus :

  -Card $A_{n+2,p} = N_{n+2,p}$. (par définition de N_{n+2},p)

  -Card $B_{n+2,p} = (p-1)N_{n,p}$ (il faut et il suffit de peindre les n premiers murs de sorte que le premier et le $n^{ème}$ mur soient de couleurs différentes -$N_{n,p}$ façons-, de peindre le $(n+1)^{ème}$ mur de la même couleur que le premier - 1 possibilité- puis de peindre le dernier mur d'une couleur différente de la couleur commune du premier et du $(n+1)^{ème}$ - p-1 possibilités -),

  -Card $C_{n+2,p} = (p-2)N_{n+1,p}$ (il faut et il suffit de peindre les n+1 premiers murs de sorte que le premier et le $(n+1)^{ème}$ mur soient de couleurs différentes -$N_{n+1,p}$ façons - puis de peindre le dernier mur d'une couleur différente du premier et du $(n+1)^{ème}$ mur - p-2 possibilités -),

  On peut maintenant conclure :

$$\boxed{N_{n+2,p} = (p-2)N_{n+1,p} + (p-1)N_{n,p}}$$

Exercice 3.

1. Soient R l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que A ∪ B = E et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, R_k l'ensemble des couples de parties (A, B) de E tels que A ∪ B = E et Card(A) = k.

   On a : $R = \bigcup_{k=0}^{n} R_k$

   L'union étant disjointe (une partie A donnée ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

   $\text{Card}(R) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(R_k)$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si A est une partie de cardinal k de E, pour avoir $A \cup B = E$, il faut et il suffit de choisir B de telle sorte que B soit la réunion de $\bar{A}$ et d'une partie C de A.

Ainsi pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour choisir une partie A cardinal k de E et une partie B de E telles que $A \cup B = E$, il faut et il suffit de :

- choisir une partie A de cardinal k de E (C_n^k possibilités),
- choisir $\bar{A}$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie C de A (2^k possibilités, A étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\text{Card}(R_k) = C_n^k 2^k$, et donc, d'après ce qui précède :

$\text{Card}(R) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

$= (1+2)^n$ et donc :

$= 3^n$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Il y a } 3^n \text{ couples } (A, B) \text{ de parties de E telles que } A \cup B = E}$$

NB : *On aurait également pu montrer qu'il y a autant de couples (A, B) convenables que d'applications de E dans {0, 1, 2} qui à tout élément de* $A \cap \overline{B}$ *associe 0, de* $B \cap \overline{A}$ *associe 1 et de* $A \cap B$ *associe 2*.

2. Soient S l'ensemble des triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, S_k l'ensemble des triplets de parties (A, B, C) de E tels que :

$A \cup B \cup C = E$ et $\text{Card}(A \cup B) = k$. On a : $S = \bigcup_{k=0}^{n} S_k$.

L'union étant disjointe (pour tout couple (A, B) de parties de E, $A \cup B$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\text{Card}(S) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}(S_k)$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si $A \cup B$ est une partie de cardinal k de E, pour avoir : $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit que C soit la réunion de $\overline{A \cup B}$ et d'une partie D quelconque de $A \cup B$. Ainsi Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour choisir une partie $A \cup B$ de cardinal k de E et une partie C de E telles que $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit de :

- choisir la sous-partie E_k de E de cardinal k telle que $A \cup B = E_k$ (C_n^k possibilités),
- choisir A et B tels que $A \cup B = E_k$ (3^k possibilités d'après le résultat de la question précédente),
- choisir $\overline{A \cup B}$ (1 possibilité), et :

- choisir une partie D de $A \cup B$ (2^k possibilités, $A \cup B$ étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\text{Card}(S_k) = C_n^k 3^k 2^k = C_n^k 6^k$, et donc, d'après ce qui précède :

$\text{Card}(S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 6^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

$= (1+6)^n$ et donc :

$= 7^n$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\text{Il y a } 7^n \text{ triplets } (A, B, C) \text{ de parties de E telles que } A \cup B \cup C = E}$$

3. Montrons par récurrence que pour tout entier p supérieur ou égal à 2, le nombre de p-listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties de E telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = E$ est $(2^p - 1)^n$:

- Au rang p = 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et F un ensemble à n éléments. D'après le résultat de la question 1, il y a $3^n = (2^2-1)^n$ couples (A, B) de parties de F telles que $A \cup B = F$. La propriété est donc bien vérifiée au rang p = 2.
- Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(2^p-1)^n$ p-listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties d'un ensemble F à n éléments telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = F$.

  Soient alors $q \in \mathbb{N}^*$ et G un ensemble à q éléments. Notons T l'ensemble des (p+1)-listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties de G telles que $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$ et, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, T_k l'ensemble des (p+1)-listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties d'un ensemble G à n éléments telles que $\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) = G$ et telles que $\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = k$. On a :

  $T = \bigcup_{k=0}^{q} T_k$.
- L'union étant disjointe (pour toute (p+1)-listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties de G, l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

  $\text{Card}(T) = \sum_{k=0}^{q} \text{Card}(T_k)$.

  Or, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, si $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ est une partie de cardinal k de G, pour avoir $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$, il faut et il suffit de choisir A_{p+1} de telle sorte que A_{p+1} soit la réunion de $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et d'une partie de $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, pour choisir une famille $\{A_i,\ i \in [\![1, p+1]\!]\}$ de parties de G telles que Card $\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)$ = k et $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$ = G, il faut et il suffit de :

- choisir une sous-partie G_k de G de cardinal k telle que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = G_k$ (C_q^k possibilités),
- choisir les sous parties $\{A_i,\ i \in [\![1, p]\!]\}$ telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = G_k$ ($(2^p - 1)^k$ possibilités d'après l'hypothèse de récurrence avec $F = G_k$ et n = k),
- choisir $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie H de G_k (2^k possibilités, G étant de cardinal k).

On en déduit alors :

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\text{Card}(T_k) = C_q^k\ (2^p - 1)^k\ 2^k = C_q^k\,(2^{p+1} - 2)^k$ et donc, d'après ce qui précède :

$\text{Card}(T) = \sum_{k=0}^{q} C_q^k\ (2^{p+1} - 2)^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

$= (2^{p+1} - 1)^q$.

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout ensemble G de cardinal q, il existe $(2^{p+1} - 1)^q$ (p + 1)-listes $(A_i)_{1 \le i \le p+1}$ de parties de G, telles que $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$ = G ce qui nous permet d'écrire que, si la propriété est vérifiée au rang p, elle l'est également au rang p+1.

On peut finalement conclure :

Pour tout $p \in [\![2, +\infty[\![$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(2^p-1)^n$ p-listes $(A_i)_{1 \le i \le p}$ de parties d'un ensemble E de cardinal n telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ = E.