CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

jeudi 24 avril 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

Une éprouvette contient 10 bactéries, 4 sont des bactéries de type A, 6 de type B. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires, la proportion de bactéries de chaque type restant inchangée. On prélève alors, au hasard, 10 bactéries que l'on met dans une autre éprouvette. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires dans les mêmes conditions que précédemment, et on recommence l'expérience.
Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences?

L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

Définitions. Soit une variable aléatoire X; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,..,N\}$. On pose $p = \dfrac{k_0}{N}$ et $q = 1-p$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, A, P), à valeurs dans $\{0,..,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante:

X_0 est la variable certaine égale à k_0.
X_1 suit la loi binomiale de paramètres N et p. (Par convention, on dit que la loi binomiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable certaine égale à 0 et que la loi binomiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable certaine égale à N).
Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n=k)$ est la loi binomiale de paramètres N et $\dfrac{k}{N}$. En d'autres termes:
pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$ et pour tout entier i de $\{0,..,N\}$,

$$P(X_{n+1} = i / X_n = k) = C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} \quad \text{(avec la convention habituelle que } 0^0 = 1 \text{).}$$

On a de plus l'hypothèse (H): pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,..,k_n)$ de $\{0,..,N\}^n$ tel que $P(X_n = k_n, .., X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1} = i / X_n = k_n, ..., X_1 = k_1) = P(X_{n+1} = i / X_n = k_n)$.
Cette hypothèse n'est utile que pour la question 6. de la partie 1.

On définit la suite de variables aléatoires $(F_n)_{n\geq 0}$ par $F_n = \dfrac{X_n}{N}$.

PRELIMINAIRE

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N le nombre de bactéries prélevées à chaque expérience, k_0 le nombre de bactéries de type A dans la première éprouvette au début de la première expérience et n le numéro de l'expérience, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binomiale. Comment interpréter l'hypothèse (H)?

PARTIE 1

Dans cette partie, $N = 3$.

1) Que dire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$.

2) Pour tout entier n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = A U_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Soit le vecteur ligne $V = (0,1,2,3)$. Calculer VA.
b) Montrer que $E(X_n) = V U_n$, pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$.

4) a) On pose $Y_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $Y_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Calculer AY_2 et AY_3 en fonction de Y_2 et Y_3.

b) Montrer que A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
c) Calculer A^n pour tout entier n.

5) a) Montrer que la loi de X_n est donnée par:
$P(X_n=0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$, $P(X_n=1)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$

$P(X_n=2)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$, $P(X_n=3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$.

b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

6) Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n=\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\leq 1)$.

On pose $x_1=P(X_1=0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $x_k=P(X_1=1,\dots,X_{k-1}=1,X_k=0)$, et pour tout entier k non nul, $y_k=P(X_1=1,\dots,X_k=1)$.

a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k. En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

b) Montrer que $P(B_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k+y_n$. En déduire $P(B_n)$ et la limite de la suite $(P(B_n))_{n\geq 1}$.

c) En déduire la probabilité qu'il existe n vérifiant $F_n>0{,}5$.

PARTIE 2

Dans cette partie, N est un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{1,..,N-1\}$.

On pose pour tout entier n, $u_n=P(X_n=0)+P(X_n=N)$ et $v_n=1-u_n$.

A. Loi de X_n

1) Montrer que pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{N}P(X_n=k)\,C_N^i\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$.

2) Montrer que pour tout entier n, $E(X_{n+1})=E(X_n)$.

3) a) Montrer que pour tout entier n, $E\left[X_{n+1}(N-X_{n+1})\right]=\frac{N-1}{N}E\left[X_n(N-X_n)\right]$.

b) En déduire la valeur de $E\left[X_n(N-X_n)\right]$ en fonction de n, N et k_0.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et convergente.

5) a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans IR_+, prenant un nombre fini de valeurs.

Montrer que pour tout réel a strictement positif, $P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$.

b) Etudier sur $[1,N-1]$ la fonction f définie par: $\forall x\in[1,N-1], f(x)=x(N-x)$.

c) En utilisant la valeur de $E\left[X_n(N-X_n)\right]$, montrer que pour tout entier n, $0\leq v_n\leq pq\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

6) a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$?

b) En déduire que pour tout entier k de $\{1,..,N\text{-}1\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

c) En utilisant le résultat du 2), montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = N) = p$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$.

d) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

B. Temps d'arrêt

On définit la variable aléatoire T par:

si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq N)$, alors $T = 0$

sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = N)$.

1) Que vaut $P(T=0)$? Montrer que pour tout entier n non nul, $P(T=n) = v_{n-1} - v_n$.

2) a) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} kP(T = k) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k - nv_n$.

b) En déduire que T admet une espérance et que $E(T) \leq pq\dfrac{N^3}{N-1}$ (on ne cherchera pas à calculer $E(T)$).

C. Retour aux bactéries

Dans l'exemple des bactéries, on a posé la question : « Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences ? ». Pouvez-vous maintenant y répondre ?

Dans l'ensemble de l'épreuve, on conviendra de noter $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ l'espace probabilisé sur lequel les variables aléatoires considérées sont définies.

PRELIMINAIRE

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires égales au nombre de bactéries de type A présentes dans l'urne après la $n^{\text{ème}}$ expérience.

• Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une approximation de Y_n.

• Comme il y a, avant la première experience, k_0 bactéries de type A dans la première éprouvette, Y_0 est certaine égale à k_0, et suit donc la même loi que X_0.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que X_n soit une approximation de Y_n. Y_n prenant ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$, $\left((Y_n = k)\right)_{0 \le k \le N}$ forme un système complet d'événements tous de probabilités non nulles, et la formule des probabilités totales nous permet alors d'écrire :

$$\forall i \in [\![0, N]\!],\ p(Y_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{n} p(Y_n = k)\ p\left(Y_{n+1} = i / Y_{n+1} = k\right).\ (1)$$

Soit alors $k \in [\![0, N]\!]$. Si exactement k bactéries de type A ont été tirées lors de la $n^{\text{ème}}$ expérience, il y aura, les proportions étant gardées lors de la reproduction des bactéries dans la $(n+1)^{\text{ème}}$ éprouvette, une proportion $\frac{k}{n}$ de bactéries de type A et $\frac{n-k}{n}$ de bactéries de type B avant la $(n+1)^{\text{ème}}$ expérience. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, sachant $(Y_n = k)$, Y_{n+1} représente alors le nombre de bactéries de type A prélevées lors d'un tirage de N bactéries parmi m dont une proportion $\frac{k}{n}$ de bactéries de type A et suit donc une loi hypergéométrique de paramètres $\left(m, N, \frac{k}{n}\right)$.

Mais, comme m est grand (plusieurs milliers) et comme on peut supposer N petit (le but du problème étant l'étude d'une suite de tirages de N = 10 bactéries), on peut donc supposer m supérieur ou égal à 10N, et l'on peut ainsi approcher Y_{n+1} sachant $(Y_n = k)$ par une loi binomiale de paramètres $\left(N, \frac{k}{n}\right)$. Ainsi :

$$\forall i \in [\![0, N]\!],\ \forall k \in [\![0, N]\!],\ p\left(Y_{n+1} = i / Y_n = k\right) \approx C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} \quad \text{et donc :}$$

$$\approx p\left(X_{n+1} = i / X_n = k\right).$$

A l'aide de l'hypothèse de récurrence, on peut alors écrire, d'après la relation (1) :

$$i \; [\![0,\, N]\!],\; p(Y_{n+1} = i) \approx \sum_{k=0}^{N} p(X_n = k)\; p\left(X_{n+1} = i / X_n = k\right)$$ et donc, à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$\approx\; p(X_{n+1} = i).$$

Ainsi, comme Y_{n+1} prend les mêmes valeurs que X_{n+1}, on peut alors écrire que Y_{n+1} peut être approchée par X_{n+1}.

• On peut désormais conclure :

Pour tout n ℕ, X_n est une approximation de la variable aléatoire égale au nombre de bactéries de type A dans l'éprouvette à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ expérience.

• L'hypothèse (H) nous montre que nous avons affaire à un processus markovien à "mémoire limitée", c'est-à-dire que seul le nombre de bactéries de type A tirées lors de la $n^{\text{ème}}$ expérience a un effet sur la $(n+1)^{\text{ème}}$, l'effet des $n - 1$ premières expériences étant en quelque sorte "contenu" dans la loi de Y_n et donc de X_n.

PARTIE I

1) • Si $N = 3$ et $k_0 = 0$, il n'y a que des bactéries de type B dans l'éprouvette initiale. Chaque tirage sera donc effectué dans une éprouvette ne contenant que des bactéries de type B, et l'on ne pourra donc tirer que des bactéries de type B. On peut donc conclure :

Si $k_0 = 0$, alors, pour tout n ℕ, X_n est la variable certaine égale à 0

• Si $N = 3$ et $k_0 = 3$, il n'y a que des bactéries de type A dans l'éprouvette initiale. Chaque tirage sera donc effectué dans une éprouvette ne contenant que des bactéries de type A, et l'on ne pourra donc tirer que des bactéries de type A. On peut donc conclure :

Si $k_0 = 3$, alors, pour tout n ℕ, X_n est la variable certaine égale à 3

2) Si N = 3, on sait que, pour tout n ℕ*, X_n ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2 et 3. $((X_n = k))_{0 \leq k \leq 3}$ forme donc un système complet d'événements tous de probabilités non nulles, et la formule des probabilités totales nous permet alors d'écrire :

$$n\ \mathbb{N}^*,\quad k\ [\![0,\, 3]\!],\ p(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{3} \ p(X_n = i)\, p\big(X_{n+1} = k \,/\, X_n = i\big)$$

soit, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n = i)$ étant donnée dans les définitions :

$$= \sum_{i=0}^{3} \ C_3^k \left(\frac{i}{3}\right)^k \left(1 - \frac{i}{3}\right)^{3-k} p(X_n = i)$$

d'où, pour tout n ℕ :

- $p(X_{n+1} = 0) = 1\,p(X_n = 0) + \frac{8}{27}\,p(X_n = 1) + \frac{1}{27}\,p(X_n = 2) + 0\,p(X_n = 3)$,
- $p(X_{n+1} = 1) = 0\,p(X_n = 0) + \frac{4}{9}\,p(X_n = 1) + \frac{2}{9}\,p(X_n = 2) + 0\,p(X_n = 3)$,
- $p(X_{n+1} = 2) = 0\,p(X_n = 0) + \frac{2}{9}\,p(X_n = 1) + \frac{4}{9}\,p(X_n = 2) + 0\,p(X_n = 3)$,
- $p(X_{n+1} = 3) = 0\,p(X_n = 0) + \frac{1}{27}\,p(X_n = 1) + \frac{8}{27}\,p(X_n = 2) + 1\,p(X_n = 3)$.

Ce qui peut s'écrire matriciellement :

$$n\ \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} p(X_{n+1} = 0) \\ p(X_{n+1} = 1) \\ p(X_{n+1} = 2) \\ p(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \\ p(X_n = 2) \\ p(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

et on peut donc conclure, le cas n = 0 rejoignant le cas général :

3) **a)** on a :

$$VA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$$

donc, après calculs :

$VA = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ et donc, en reconnaissant V dans le membre de droite :

$$\boxed{VA = V}$$

b) • On a :

$n\ \mathbb{N},\ E(X_n) = 0\,p(X_n = 0) + 1\,p(X_n = 1) + 2\,p(X_n = 2) + 3\,p(X_n = 3)$

ce qui peut également s'écrire :

$$= \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p(X_n = 0)\\ p(X_n = 1)\\ p(X_n = 2)\\ p(X_n = 3)\end{pmatrix}.$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{n\ \mathbb{N},\ E(X_n) = VU_n}$$

• Il en découle alors :

$n\ \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = VU_{n+1}$ soit, d'après les résultats du 2 :

$= VAU_n$ soit, comme VA = V (cf. question 3.a) :

$= VU_n$ et donc, en reconnaissant $E(X_n)$:

$= E(X_n)$.

On en déduit alors que la suite $\left(E(X_n)\right)_{n\ \mathbb{N}}$ est une suite constante, et donc que :

$n\ \mathbb{N},\ E(X_n) = E(X_0)$ soit, X_0 étant la variable certaine égale à $k_0 = 1$:

$$\boxed{n\ \mathbb{N},\ E(X_n) = 1}$$

4) a) • On a :

$$AY_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ d'où, après calculs :

$$= \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ soit, en reconnaissant Y_2 :

$$\boxed{AY_2 = \frac{2}{9} Y_2}$$

• De même, on a :

$$AY_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ d'où, après calculs :

$$= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ soit, en reconnaissant Y_3 :

$$\boxed{AY_3 = \frac{2}{3} Y_3}$$

b) • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est valeur propre de A si, et seulement si, l'équation $(A - \lambda I)X = 0$ admet des solutions X non nulles. Or, on a :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 0 \end{pmatrix}.$$

1 est donc valeur propre de A et comme rg (A - I) = 2, son sous-espace propre associé E_1 est de dimension : 4 - 2 = 2. Comme, d'après le résultat de la question 4a, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{3}$ sont valeurs propres de A de sous-espace propre associés E_2 et E_3 de dimension supérieure ou égale à 1, il en découle, comme dim $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = 4$ et comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de A ne peut dépasser 4, que E_1 est de dimension 2 et que E_2 et E_3 sont de dimension 1. On peut alors conclure, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A étant égale à 4, que :

$$\boxed{\text{A est diagonalisable}}$$

* Posons alors :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $AY_0 = Y_0$ et $AY_1 = Y_1$, on peut alors conclure :

$$\boxed{E_1 = \mathit{Vect}\,(Y_0, Y_1),\ E_2 = \mathit{Vect}\,(Y_2) \text{ et } E_3 = \mathit{Vect}\,(Y_3)}$$

c) * Posons alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ on a alors :}$$

$A = PDP^{-1}$.

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Au rang $n = 0$. On a : $A^0 = I = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$ (car $D^0 = I$). La propriété est donc vérifiée au rang $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que : $A^n = PD^nP^{-1}$. On a alors : $A^{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}$, et donc, comme : $P^{-1}P = I$: $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$. Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

• Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

• Déterminons alors P^{-1} :

$$P = IP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

d'où ($L_2 \leftrightarrow L_4$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

soit encore ($L_4 \leftarrow L_3 + L_4$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} P$$

soit ($L_4 \leftarrow -\frac{1}{2} L_4$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} P$$

donc ($L_3 \leftarrow \frac{1}{3}(L_4 + L_3)$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_4$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} P$$

donc ($L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$) :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\\0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix} P \quad \text{d'où } P^{-1} = \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\\0&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\left(\frac{2}{9}\right)^n&0\\0&0&0&\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{pmatrix}$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n P^{-1} = \begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\\0&-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n&\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n&0\\0&-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{pmatrix}.$$

On peut alors conclure, en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \\ b_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \\ c_n = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \\ d_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \end{cases},$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix}1&a_n&d_n&0\\0&b_n&c_n&0\\0&c_n&b_n&0\\0&d_n&a_n&1\end{pmatrix},\ \text{pour tout entier naturel } n}$$

5) a) On a vu, dans la question 2, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$. Il en découle, par récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$ et, comme $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on peut conclure, grâce au calcul de A^n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \\ p(X_n = 2) \\ p(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \end{pmatrix}}$$

b) On a alors, par définition de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![0, 3]\!],\ p\left(F_n = \frac{i}{3}\right) = p\left(\frac{X_n}{3} = \frac{i}{3}\right)$ donc :

$= p(X_n = i)$ soit, d'après les résultats précédents :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} p\left(F_n = \frac{1}{3}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} p\left(F_n = \frac{2}{3}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} p\left(F_n = 0\right) = \frac{2}{3} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} p\left(F_n = 1\right) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ce qui nous permet de conclure :

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$

6) a) • On a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x_{k+1} = p\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right) \cap (X_{k+1} = 0)\right)$ donc :

$= p\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right) p\left((X_{k+1} = 0) / \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right)$ d'où, en reconnaissant y_k :

$= p\left((X_{k+1} = 0) / \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right) y_k$ soit encore, d'après l'hypothèse (H) :

$= p\left((X_{k+1} = 0) / (X_k = 1)\right) y_k$ d'où, la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $(X_k = 1)$ étant donnée dans les définitions :

$= \frac{8}{27} y_k$.

• De même, on a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ y_{k+1} = p\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right) \cap (X_{k+1} = 1)\right)$ donc :

$= p\left(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right) p\left((X_{k+1} = 1) / \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right)$ d'où, en reconnaissant y_k :

$= p\left((X_{k+1} = 1) / \bigcap_{i=1}^{k} (X_i = 1)\right) y_k$ soit encore, d'après l'hypothèse (H) :

$= p\left((X_{k+1} = 1) / (X_k = 1)\right) y_k$ d'où, la loi conditionnelle de X_{k+1} sachant $(X_k = 1)$ étant donnée dans les définitions :

$= \frac{4}{9} y_k$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ y_{k+1} = \frac{4}{9} y_k \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \frac{8}{27} y_k}$$

• $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $y_1 = p(X_1 = 1) = \frac{4}{9}$ (cf. question 5a, loi de X_n) et on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

• Il en découle alors, d'après le résultat de la question précédente :

$\forall n \geq 2,\ x_n = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

De plus, le cas $n = 1$ rejoint le cas général. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad \text{et} \quad x_n = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

b) • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si X_k prend la valeur 0, alors, pour tout entier i supérieur ou égal à k, X_i prendra la valeur 0 avec une probabilité égale à 1 (en effet, s'il n'y a que des bactéries de type B dans l'éprouvette, on peut difficilement tirer des bactéries de type A). On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n} \left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = 1)\right) \cap (X_k = 0)\right)\right) \cup (X_1 = 0)$$

soit, ces événements étant deux à deux incompatibles :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(B_n) = p\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 1)\right) + \sum_{k=2}^{n} p\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (X_i = 1)\right) \cap (X_k = 0)\right) + p(X_1 = 0)$$

soit, en reconnaissant y_n et x_k :

$$= y_n + \sum_{k=1}^{n} x_k .$$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(B_n) = y_n + \sum_{k=1}^{n} x_k}$$

• On a alors, en remplaçant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, y_n et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, x_k par leur valeur :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(B_n) = \left(\frac{4}{9}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

soit, en reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{9} \neq 1$:

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^n + \frac{8}{27}\,\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$$

soit encore :

$$= \frac{8}{15} + \frac{7}{15}\left(\frac{4}{9}\right)^n .$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(B_n) = \frac{8}{15} + \frac{7}{15}\left(\frac{4}{9}\right)^n}$$

* Par passage à la limite, on peut également conclure, comme $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p(B_n) = \frac{8}{15}}$$

c) Soit E l'événement "il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_n > 0,5$". On a :

$E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(F_n > \frac{1}{2}\right)$ soit encore :

$= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(F_n > \frac{3}{2}\right)$ soit, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$:

$= \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n \geq 2)$ soit, encore :

$= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{X_n \leq 1}$ d'où :

$= \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} (X_n \leq 1)}$ et donc :

$p(E) = 1 - p\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} (X_n \leq 1)\right)$ soit, comme $p\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} (X_n \leq 1)\right) = \lim_{n \to +\infty} p(B_n)$:

$= \frac{7}{15}$.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'il existe un rang } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } (F_n > 0,5) \text{ est } \frac{7}{15}}$$

PARTIE II

A. Loi de X_n

1) X_n prenant ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$, la famille $\left((X_n = k)\right)_{0\leq k\leq N}$ forme un système complet d'événements tous de probabilités non nulles et l'on peut donc écrire, d'après la formule des probabilités totales :

$\forall i \in [\![0, N]\!]$, $p(X_{n+1} = i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} p(X_n = k)\, p\left(X_{n+1} = i / X_n = k\right)$ soit, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n = k)$ étant donnée dans les définitions :

$$= \sum_{k=0}^{N} C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} p(X_n = k).$$

On peut ainsi conclure :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, N]\!],\ p(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{N} C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} p(X_n = k)}$$

2) On a alors :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} i\left(\sum_{k=0}^{N} C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} p(X_n = k)\right)$ soit, en inversant les sommes :

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{N} p(X_n = k)\left(\sum_{i=0}^{N} i\, C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}\right)$ donc, comme $iC_N^i = NC_{N-1}^{i-1}$, le terme pour $i = 0$ étant nul :

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{N} N p(X_n = k)\left(\sum_{i=1}^{N} C_{N-1}^{i-1} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}\right)$ soit, en effectuant le changement d'indice $i' = i - 1$:

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{N} N p(X_n = k)\left(\sum_{i=0}^{N-1} C_{N-1}^{i} \left(\frac{k}{N}\right)^{i+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-1-i}\right)$ et donc, en mettant $\frac{k}{N}$ en facteur dans la seconde somme et en utilisant la formule du binôme :

$= \displaystyle\sum_{i=0}^{N} k\, p(X_n = k)$ d'où, en reconnaissant $E(X_n)$:

$= E(X_n)$.

On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = E(X_n)}$$

3) a) D'après le théorème de transfert, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}(N - X_{n+1})) = \sum_{i=0}^{N} i(N-i)\,p(X_{n+1} = i)$ donc, d'après le résultat de la question 1 :

$= \sum_{i=0}^{N} i(N-i)\left(\sum_{k=0}^{N} C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} p(X_n = k)\right)$ soit, en inversant les sommes :

$= \sum_{k=0}^{N} p(X_n = k)\left(\sum_{i=0}^{N} i(N-i)\,C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}\right)$ soit, les termes pour $i = 0$ et $i = N$ étant nuls et comme $i(N-i)C_N^i = N(N-1)C_{N-2}^{i-1}$:

$= \sum_{k=0}^{N} N(N-1)\,p(X_n = k)\left(\sum_{i=1}^{N-1} C_{N-2}^{i-1} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}\right)$

donc, en effectuant le changement d'indice $i' = i - 1$:

$= \sum_{k=0}^{N} N(N-1)\,p(X_n = k)\left(\sum_{i=0}^{N-2} C_{N-2}^{i} \left(\frac{k}{N}\right)^{i+1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-1-i}\right)$ soit, en mettant $\frac{k(N-k)}{N^2}$ en facteur et en utilisant la formule du binôme :

$= \frac{N-1}{N} \sum_{k=0}^{N} k(N-k)\,p(X_n = k)$ d'où, en reconnaissant $E(X_n(N - X_n))$ à l'aide du théorème de transfert :

$= \frac{N-1}{N} E(X_n(N - X_n))$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}(N - X_{n+1})) = \frac{N-1}{N} E(X_n(N - X_n))}$$

b) La suite $\left(E(X_n(N - X_n))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $k_0(N - k_0)$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n(N - X_n)) = k_0(N - k_0)\left(\frac{N-1}{N}\right)^n}$$

4) Soit n $\mathbb{N}$.

• Si l'événement (X_n = 0) (resp. X_n = N) est réalisé, l'éprouvette ne contiendra que des bactéries de type B (resp. de type A) avant la (n + 1)$^{\text{ème}}$ expérience et l'événement (X_{n+1} = 0) (resp. (X_{n+1} = N) sera donc également réalisé. On peut donc en déduire que ($X_n = 0$)   ($X_{n+1} = 0$) et que ($X_n = N$)   ($X_{n+1} = N$), ce qui nous permet d'écrire :

$p(X_{n+1} = 0) - p(X_n = 0) \geq 0$ et :

$p(X_{n+1} = N) - p(X_n = N) \geq 0$ soit encore, en sommant ces deux inégalités :

$\big(p(X_{n+1} = N) + p(X_{n+1} = 0)\big) - \big(p(X_n = N) + p(X_n = 0)\big) \geq 0$ et donc, en reconnaissant u_{n+1} et u_n :

$u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n \; \mathbb{N}}$ est donc croissante.

• De plus, on a :

$u_n = p(X_n = 0) + p(X_n = N)$ donc, ces deux probabilités étant comprises entre 0 et 1 :

$u_n \leq 2$.

La suite $(u_n)_{n \; \mathbb{N}}$ est donc majorée.

La suite $(u_n)_{n \; \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \; \mathbb{N}} \text{ est croissante et elle converge}}$$

5) a) On a :

a $\mathbb{R}_+^*$, $E(X) = \sum\limits_{x \;\; X(\Omega)} x\, p(X = x)$ d'où, x et p(X = x) étant positifs (x $\mathbb{R}^+$) :

$\geq \sum\limits_{\substack{x \;\; X(\Omega) \\ x \geq a}} x\, p(X = x)$ d'où, x et p(X = x) étant positifs (x $\mathbb{R}^+$) :

$\geq a \sum\limits_{\substack{x \;\; X(\Omega) \\ x \geq a}} p(X = x)$ soit, en reconnaissant $p(X \geq a)$:

$\geq a\, p(X \geq a)$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{a \;\; \mathbb{R}_+^*,\ p(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

b) f est dérivable sur [1, N - 1] comme fonction polynôme définie sur un segment et on a :

$\forall x \in [1, N-1],\ f'(x) = N - 2x.$

On peut alors dresser le tableau de variations de f :

x		$\frac{N}{2}$		$N-1$
$f'(x)$	+	0	-	
f	$N-1$ ↗	$\left(\frac{N}{2}\right)^2$	↘	$N-1$

c) On a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - u_n$ soit, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p([X_n = 0] \cup [X_n = N])$:

$= p([X_n = 0] \cap [X_n = N]).$

De plus, comme X_n prend ses valeurs dans $[\![0, N]\!]$, $[X_n = 0] \cap [X_n = N]$ est réalisé si et seulement si X_n prend une valeur dans $[\![1, N-1]\!]$, et donc, d'après la question précédente, si et seulement si $X_n(N - X_n)$ prend une valeur supérieure ou égale à N - 1. Ainsi : $[X_n = 0] \cap [X_n = N] = [X_n(N - X_n) \geq N - 1]$. On peut maintenant écrire :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = p(X_n(N - X_n) \geq N - 1).$

Il en découle, en considérant les résultats du 5a appliqués, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à la variable aléatoire $X_n(N - X_n)$ avec $a = N - 1$ $(N \geq 2)$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{E(X_n(N - X_n))}{N-1}$ et donc, d'après les résultats du 3b :

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{k_0(N-k_0)}{N-1}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n$ soit, comme $p = \dfrac{k_0}{N}$ et $q = \dfrac{N-k_0}{N}$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq pq\dfrac{N^2}{N-1}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n.$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \leq p\,q\,\frac{N^2}{N-1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}$$

6) a) p et q étant indépendants de n et comme $\left|1-\frac{1}{n}\right| < 1$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} pq\,\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n = 0.$$

La suite $(v_n)_{n \ \mathbb{N}}$ est donc encadrée par deux suites tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc d'après le théorème de l'encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

b) Comme pour tout i $[\![1, N-1]\!]$, $[X_n = i] \quad [X_n = 0] \cap [X_n = N]$, on a :

i $[\![1, N-1]\!]$, $0 \leq p(X_n = i) \leq v_n$ et donc, par encadrement :

$$\boxed{i \ [\![1, N-1]\!],\ \lim_{n\to+\infty} p(X_n = i) = 0}$$

c) • On a :

n $\mathbb{N}$, $E(X_n) = \sum_{k=0}^{N} k\, p(X_n = k)$ donc, par passage à la limite, les suites en présence étant convergentes :

$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} k\, p(X_n = k)$ soit, comme, pour tout i_[0, N], p(Xn = i) ≥ 0 :

$= \sum_{k=0}^{N} k \lim_{n\to+\infty} p(X_n = k)$ soit, en éliminant le terme en 0 (nul) et les termes de i = 1 à i = N - 1 dont, d'après la question précédente, la limite est nulle :

$= \lim_{n\to+\infty} N p(X_n = N)$.

Or on a montré dans la question 2 que, pour tout n $\mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = E(X_n)$. On en déduit que la suite $(E(X_n))_{n \ \mathbb{N}}$ est constante, et donc que :

n $\mathbb{N}$, $E(X_n) = E(X_0)$ et donc, comme X_0 est la variable certaine égale à k_0 :

$= k_0$.

On a alors :

$\lim\limits_{n \to +\infty} Np(X_n = N) = k_0$ soit, en divisant par N > 0 qui ne dépend pas de n :

$\lim\limits_{n \to +\infty} p(X_n = N) = \dfrac{k_0}{N}$ et, comme $p = \dfrac{k_0}{N}$, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p(X_n = N) = p}$$

• De plus, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, et comme, pour tout $n \ \mathbb{N}$, $u_n = 1 - v_n$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$. On en déduit alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (p(X_n = N) + p(X_n = 0)) = 1$. Il en découle alors d'après les résultats de la question prédédente :

$\lim\limits_{n \to +\infty} p(X_n = 0) = 1 - p$ soit, comme $q = 1 - p$:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p(X_n = 0) = q}$$

d) Par définition de la suite $(F_n)_{n \ \mathbb{N}}$, on a :

$n \ \mathbb{N}, \quad k \ [\![0, N]\!], \ p\left(F_n = \dfrac{k}{N}\right) = p\left(\dfrac{X_n}{N} = \dfrac{k}{N}\right)$ soit encore :

$= p(X_n = k)$ donc, d'après les résultats précédents :

- $k \ [\![1, N - 1]\!], \ \lim\limits_{n \to +\infty} p\left(F_n = \dfrac{k}{N}\right) = 0$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} p(F_n = 1) = p$ et :
- $\lim\limits_{n \to +\infty} p(F_n = 0) = q$.

On peut alors conclure :

La suite $(F_n)_{n \ \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p

B- Temps d'arrêt.

1) • On a :

$p(T = 0) = p\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} (X_n \neq 0) \cap (X_n \neq N)\right)$ donc :

$p(T = 0) = 1 - p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0) \cup (X_n = N)\right)$ soit les événements étant incompatibles :

$= 1 - p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)\right) - p\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = N)\right)$ d'où les unions étant croissantes car $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$ et $[X_n = N] \subset [X_{n+1} = N]$ pour tout entier n :

$= 1 - \lim\limits_{n \to +\infty} p(X_n = 0) - \lim\limits_{n \to +\infty} p(X_n = N)$ soit encore :

$= 1 - p - q$ soit finalement :

$= 0.$

On peut désormais conclure :

$$\boxed{p(T = 0) = 0}$$

• De plus, T étant la variable aléatoire égale au numéro de la première expérience où l'on a tiré qu'un seul type de bactéries, l'événement $[T = n]$ est réalisé si et seulement si l'un des deux événement $[X_n = 0]$ ou $[X_n = N]$ est réalisé mais que $[X_{n-1} = 0]$ et $[X_{n-1} = N]$ n'ont pas été réalisés. On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(T = n) = p\Big(\big((X_n = 0) \cup (X_n = N)\big) \setminus \big((X_{n-1} = 0) \cup (X_{n-1} = N)\big)\Big).$

On a : $[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$ et $[X_n = N] \subset [X_{n+1} = N]$, et donc :
$([X_{n-1} = 0] \cup [X_{n-1} = N]) \subset ([X_n = 0] \cup [X_n = N])$.

On peut donc écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(T = n) = \big(p(X_n = 0) + p(X_n = N)\big) - \big(p(X_{n-1} = 0) + p(X_{n-1} = N)\big)$

soit, en reconnaissant u_n et u_{n-1} :

$= u_n - u_{n-1}$ et donc, comme $v_n = 1 - u_n$:

$= v_{n-1} - v_n.$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(T = n) = v_{n-1} - v_n}$$

2) a) On peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k\, p(T = k) = \sum\limits_{k=1}^{n} k v_{k-1} - \sum\limits_{k=1}^{n} k v_k$ soit, en effectuant le changement d'indice $k' = k - 1$ dans la première somme :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\, p(T=k) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v_k - \sum_{k=1}^{n} k v_k \qquad \text{i.e. :}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k\, v_k + \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^{n} k v_k$$

et donc, les termes s'annulant deux à deux de $k = 1$ à $n - 1$ et comme $v_0 = 0$:

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n\, v_n.$$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\, p(T=k) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n\, v_n}$$

b) ◆ Comme la série de terme général $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ converge (série géométrique avec $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$), d'après le résultat de la question 2.5c et les théorèmes de comparaisons des séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge, et donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. De plus, d'après la question 2.5c, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq n\, v_n \leq pq \frac{N^2}{N-1}\, n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ (croissances comparées avec $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$), le théorème de l'encadrement nous permet d'écrire : $\lim_{n\to+\infty} n\, v_n = 0$.D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} k p(T=k)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et donc :

$$\boxed{\text{T admet une espérance}}$$

◆ De plus, par passage à la limite dans le résultat précédent, on a : $E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
D'après les résultats du II.5c, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_k \leq pq \frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^k$. On en déduit alors, en sommant cette inégalité de $k = 0$ à $k = n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} v_k \leq pq \frac{N^2}{N-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1-\frac{1}{N}\right)^k$$

et donc, par passage à la limite, les suites en présence étant convergentes (série géométrique) :

$E(T) \le p\,q\,\frac{N^2}{N-1}\,\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)}$ soit, après simplifications :

$$\boxed{E(T) \le p\ q\ \frac{N^3}{N-1}}$$

C- Retour aux bactéries.

L'exemple des bactéries n'étant en fait qu'un cas particulier du schéma étudié dans la partie II (avec $N = 10$, $k_0 = 4$, $p = \frac{2}{5}$ et $q = \frac{3}{5}$) il ne nous reste plus maintenant qu'à comprendre ce qui s'est passé au cours des deux dernières parties (cas général).

Ainsi la variable T, étudiée dans le II.B, prendra la valeur 0 si, à chaque tirage, on a tiré des deux types de bactéries, et la valeur n ($n \in \mathbb{N}^*$) si, à la $n^{\text{ème}}$ expérience, on n'a tiré, pour la première fois, qu'un seul type de bactéries.

Comme $p(T = 0) = 0$, on peut alors affirmer que, à un moment où à une autre, on ne tirera que des bactéries d'un même type, les résultats du II.B.2b nous permettant d'avoir une estimation du nombre moyen d'expérience pour que l'une des deux populations deviennent exclusive.

Dans notre exemple des bactéries, on peut donc conclure :

Il faudra en moyenne moins de 27 expériences pour que l'un des deux types de bactéries devienne exclusif