Double sommation

Soient n et p, deux entiers naturels non nuls.

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^3 \ln k\right)$
2. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=k}^{p} \frac{k}{i}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^3 \ln k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln k \left(\sum_{i=1}^{p} i^3\right)$$ soit la somme sur i ne dépendant pas de k :

$$= \left(\sum_{i=1}^{p} i^3\right) \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

soit enfin, à l'aide des propriétés de la fonction ln et en reconnaissant la somme des cubes des p premiers entiers naturels non nuls :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} i^3 \ln k\right) = \left[\frac{p\,(p+1)}{2}\right]^2 \ln\,(n!)}$$

2. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=k}^{p} \frac{k}{i} = \sum_{\substack{1\le k\le n\\ k\le i\le p}} \frac{k}{i}$$

$$= \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le k\le i}} \frac{k}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}\ \sum_{k=1}^{i} k$$ et en reconnaissant une somme connue :

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}\ \frac{i\,(1+i)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{p} (1+i)$$ et en posant i' = i + 1

$$= \frac{1}{2}\ \left(\sum_{i=2}^{p+1} i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p+1} i - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{p^2+3p+2-2}{2}$$ et donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{i=k}^{p} \frac{k}{i} = \frac{p(p+3)}{4}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021