

Double sommation

Soient n et p , deux entiers naturels non nuls.

1. Calculer $\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^3 \ln k \right)$
2. Calculer $\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^p \frac{k}{i}$

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^3 \ln k \right) &= \sum_{k=1}^n \ln k \left(\sum_{i=1}^p i^3 \right) \text{ soit la somme sur } i \text{ ne dépendant pas de } k : \\ &= \left(\sum_{i=1}^p i^3 \right) \sum_{k=1}^n \ln k \end{aligned}$$

soit enfin, à l'aide des propriétés de la fonction \ln et en reconnaissant la somme des cubes des p premiers entiers naturels non nuls :

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^p i^3 \ln k \right) = \left[\frac{p(p+1)}{2} \right]^2 \ln(n!)$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^p \frac{k}{i} &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \leq i \leq p}} \frac{k}{i} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq i}} \frac{k}{i} \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i k \quad \text{et en reconnaissant une somme connue :} \\ &= \sum_{i=1}^p \frac{1}{i} \frac{i(1+i)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (1+i) \quad \text{et en posant } i' = i + 1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=2}^{p+1} i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{p+1} i - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{p^2 + 3p + 2 - 2}{2} \quad \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^p \frac{k}{i} = \frac{p(p+3)}{4}$$