# Double sommation

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux suites de réels.

Indices indépendants : $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_ib_j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$ .

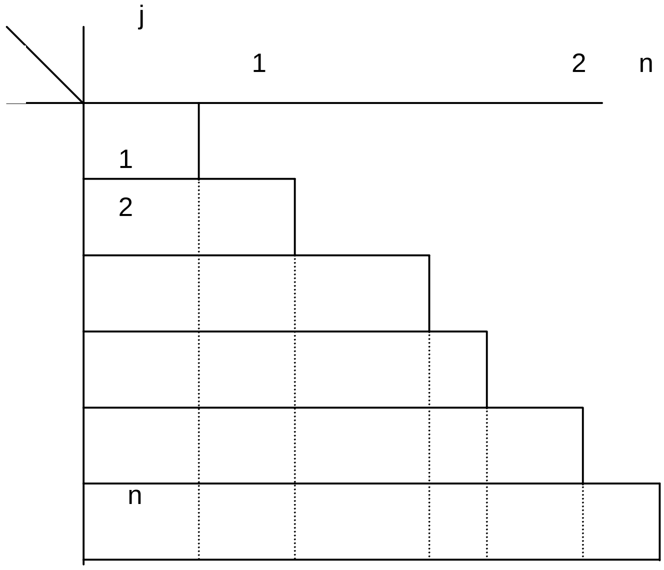
Indices liés : $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq i}} a_ib_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_ib_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} b_j$ .

$$= \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\leq i\leq n}} a_ib_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_ib_j$$

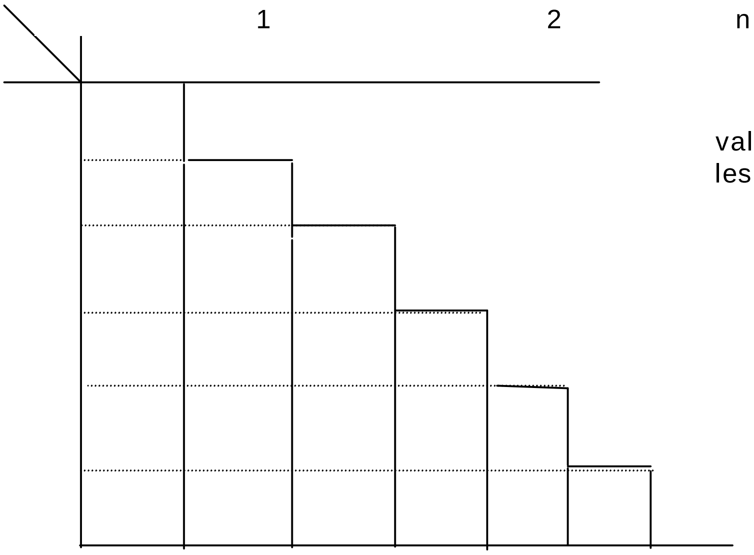
$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=j}^{n} a_i \;.$$

Pour mieux visualiser les valeurs prises par i et j dans le cas où les indices sont liés, on peut utiliser un tableau. Pour l'exemple précédent, on a :




Pour chaque valeur de i, on somme les termes pour j allant

Si on somme d'abord par rapport à j, le tableau est :




Pour chaque valeur de j, on somme les termes pour i allant

Quand procéder à une inversion des sommes ? On procède à une inversion de l'ordre de sommation pour faire apparaître une dernière somme que l'on sait calculer.