

Double sommation

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq p}$ deux suites de réels.

Indices indépendants : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_i b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) = \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)$.

Indices liés : $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i}} a_i b_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i b_j = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^i b_j$.

$$= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} a_i b_j$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_i b_j$$

$$= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=j}^n a_i$$

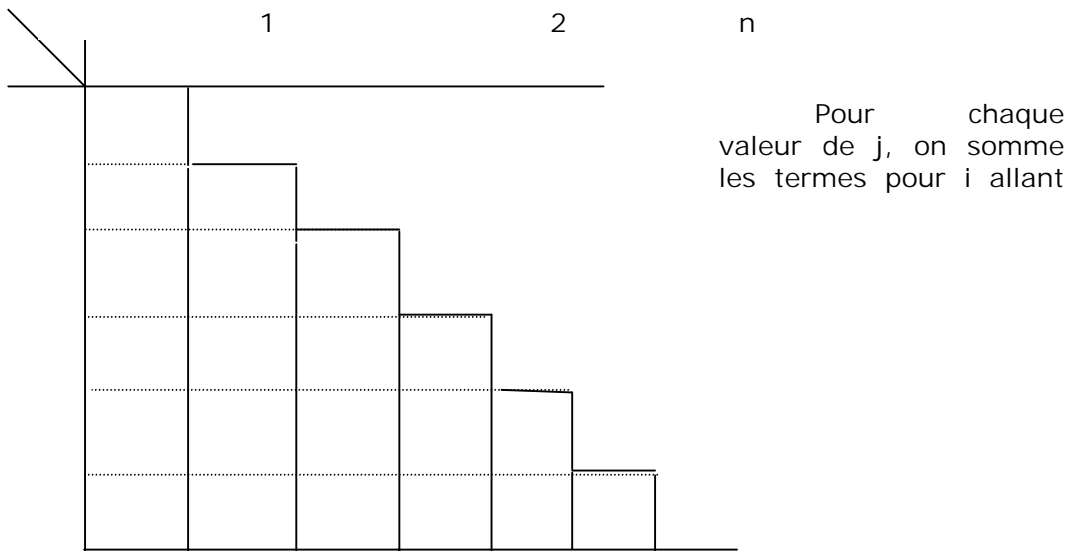
Pour mieux visualiser les valeurs prises par i et j dans le cas où les indices sont liés, on peut utiliser un tableau. Pour l'exemple précédent, on a :

| | j | 1 | 2 | ... | n |
|-----|---|---|---|-----|---|
| 1 | | | | | |
| 2 | | | | | |
| ... | | | | | |
| n | | | | | |

Pour chaque valeur de i , on somme les termes pour j allant

Double sommation

Si on somme d'abord par rapport à j , le tableau est :



Quand procéder à une inversion des sommes ? On procède à une inversion de l'ordre de sommation pour faire apparaître une dernière somme que l'on sait calculer.