

# Cinématique du point

<b>1 REPERE D'ESPACE ET REPERE DE TEMPS.....</b>	<b>2</b>
1.1 L'ESPACE PHYSIQUE.....	2
1.1.1 Représentation géométrique d'un espace affine .....	2
1.1.2 Propriétés des espaces vectoriels.....	2
1.1.3 Représentation géométrique d'un espace affine .....	3
1.2 LE TEMPS .....	3
1.2.1 Représentation géométrique de l'espace affine « Temps » .....	3
1.3 DEPLACEMENT D'UN SOLIDE DANS L'ESPACE PHYSIQUE .....	3
1.3.1 Le repère ESPACE – TEMPS.....	3
1.3.2 Remarque liée à la mécanique .....	3
<b>2 LA CINEMATIQUE DU POINT.....</b>	<b>4</b>
2.1 LE CHANGEMENT DE REPERE.....	4
2.2 VECTEUR VITESSE D'UN POINT M PAR RAPPORT A UN REPERE R.....	4
2.2.1 Propriétés du vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}_{(M \in R_k / R_i)}$ .....	5
2.2.1.1 Première propriété : $\vec{V}_{(M \in R_i / R_k)} = -\vec{V}_{(M \in R_k / R_i)}$ .....	5
2.2.1.2 Seconde propriété : Existence d'un torseur cinématique pour modéliser le mouvement d'entraînement.....	6
2.2.1.2.1 Point coïncidant $M_i(t)$ .....	6
2.3 CHAMP DES VECTEURS-ACCELERATION.....	7
2.3.1 Changement de repère .....	7
2.3.2 Vecteur accélération d'entraînement $\vec{\Gamma}_{(M \in R_k / R_i)}$ .....	8

# 1 REPERE D'ESPACE ET REPERE DE TEMPS

## 1.1 L'espace physique

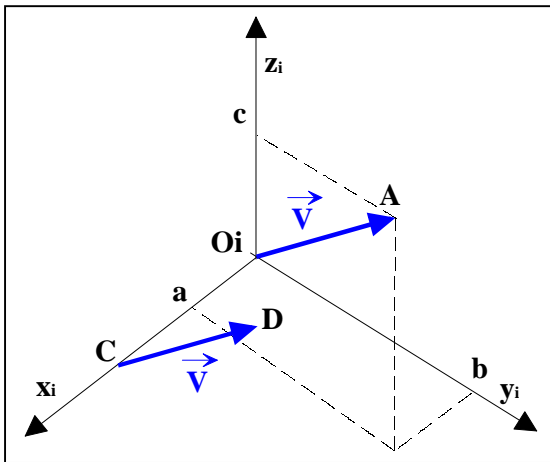
L'espace physique est modélisé par un repère affine à trois dimensions, noté  $\mathfrak{R}_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  où  $O_i$  est un point quelconque mais souvent appelé origine du repère affine. A ce repère affine, on associe un repère vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  de base orthonormée directe  $B_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ , c'est à dire :

$$(\|\bar{x}_i\| = 1, \|\bar{y}_i\| = 1, \|\bar{z}_i\| = 1 \text{ et } \bar{x}_i \cdot \bar{y}_i = 0, \bar{x}_i \cdot \bar{z}_i = 0, \bar{y}_i \cdot \bar{z}_i = 0 \text{ et pour finir } \bar{x}_i \wedge \bar{y}_i = \bar{z}_i).$$

### 1.1.1 Représentation géométrique d'un espace affine

Le repère affine  $\mathfrak{R}_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  est représenté géométriquement en noir sur la figure ci-contre.

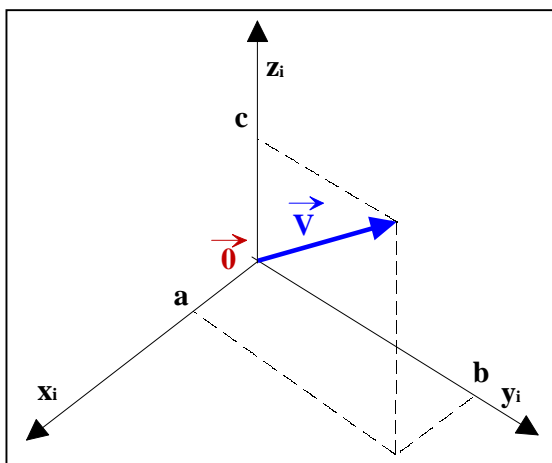
Le vecteur  $\vec{V} = \overrightarrow{O_i A} = a \cdot \bar{x}_i + b \cdot \bar{y}_i + c \cdot \bar{z}_i$  ou  $(a, b, c)$  sont les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\overrightarrow{O_i A}$  dans la base  $B_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ .



Remarque : en prenant un vecteur  $\overrightarrow{CD}$  tel que  $\|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{O_i A}\|$  et  $\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{O_i A} = \vec{0}$  ( $\overrightarrow{CD}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{O_i A}$ ) dans l'espace affine ce sont deux vecteurs différents (voir figure). Par contre dans l'espace vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ , les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{V} = \overrightarrow{CD} = a \cdot \bar{x}_i + b \cdot \bar{y}_i + c \cdot \bar{z}_i$ , ils sont identiques.

### 1.1.2 Propriétés des espaces vectoriels

Un espace vectoriel peut être composé de sous espace vectoriels. Ainsi, l'espace vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  est composé du plan vectoriel  $P_{1i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  ou  $P_{2i}(\bar{y}_i, \bar{z}_i)$  et de la droite vectorielle tel que  $D_{1i}(\bar{x}_i)$  ou  $D_{2i}(\bar{z}_i)$ .



Le cours de mathématiques sur les espaces affines et vectoriels montre que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  ne peut jamais être vide et contient au minimum l'élément neutre pour l'addition vectorielle, c'est à dire le vecteur nul noté :  $\vec{0}$ .

### 1.1.3 Représentation géométrique d'un espace affine

Dans l'espace vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ , il n'y a plus de point, il n'y a que des vecteurs.

A titre de représentation graphique, le vecteur nul  $\vec{0}$  peut être dessiné par un point.

Ce point n'a pas de position spatiale précise et tous les vecteurs appartenant à l'espace vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  doivent passer obligatoirement par la représentation ponctuelle du vecteur nul.

$\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  et  $\vec{V}$  passent donc par le seul point de la représentation géométrique et graphique de l'espace vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ .

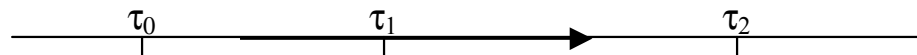
## 1.2 Le temps

Le temps est modélisé par un espace affine  $\mathcal{T}(\tau_0, \vec{t})$  de dimension 1. Cet espace vectoriel  $T(\vec{t})$  est associé à  $\mathcal{T}(\tau_0, \vec{t})$ .

### 1.2.1 Représentation géométrique de l'espace affine « Temps »

$\tau_0$  est un point appelé instant initial. La position de l'instant  $\tau_0$  n'a aucune importance, sauf pour dater des événements par rapport à une origine du temps fixe.

Le vecteur  $\overrightarrow{\tau_1 \tau_2}$  est appelé le vecteur durée, plus communément durée. La norme du vecteur durée,  $\|\overrightarrow{\tau_1 \tau_2}\|$  est exprimé en seconde (s).



**Définition :** La seconde est équivalent à la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyper fins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

## 1.3 Déplacement d'un solide dans l'espace physique

### 1.3.1 Le repère ESPACE – TEMPS

Pour modéliser le déplacement d'objets ou de personnes dans l'espace physique, il est utilisé un espace affine de dimension trois  $\mathfrak{R}_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  associé à l'espace affine temps  $\mathcal{T}(\tau_0, \vec{t})$ . Ces deux espaces affines sont distincts, mais pour modéliser le déplacement d'un point M dans l'espace physique, on donne le vecteur  $\overrightarrow{O_i M} = x(t)\bar{x}_i + y(t)\bar{y}_i + z(t)\bar{z}_i$  où  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  sont des coordonnées cartésiennes du vecteur  $\overrightarrow{O_i M}$  projetées dans le repère vectoriel  $R_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ .

**L'ensemble des deux espaces affine  $\mathfrak{R}_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  et  $\mathcal{T}(\tau_0, \vec{t})$  forme le repère ESPACE-TEMPS.**

### 1.3.2 Remarque liée à la mécanique

La modélisation des déplacements d'objets ou de personnes dans l'espace physique est appelée "Etude des mouvements".

La théorie nommée "Mécanique" englobe cette modélisation. En Classe préparatoire aux grandes écoles d'ingénieurs (C.P.G.E. P.S.I et M.P), la mécanique est limitée à la mécanique newtonienne des solides.

Les outils de calculs en Mécanique du solide sont vectoriels. C'est pourquoi, nous travaillerons essentiellement dans des repères vectoriels  $R_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  souvent assimiler à leur base  $b_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ .

## 2 LA CINEMATIQUE DU POINT

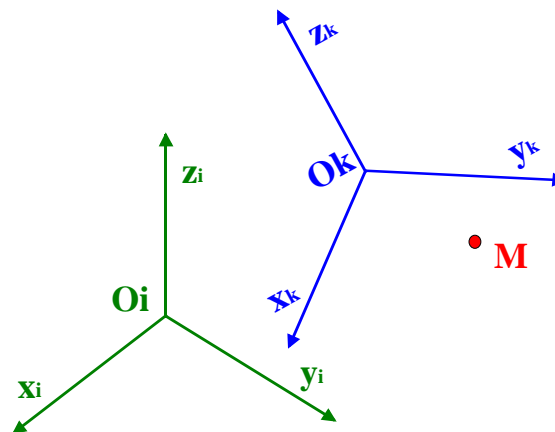
La cinématique du point se limite à la recherche du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération d'un point M par rapport à deux repères  $R_i$  et  $R_k$ .

### 2.1 Le changement de repère

Soit un point M en mouvement par rapport au repère affine  $\mathfrak{R}_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  en mouvement par rapport au repère affine  $\mathfrak{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ .

$b_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $b_k = (\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  sont des bases orthonormées directes.

$R_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $R_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$  sont des repères vectoriels associés respectivement à  $\mathfrak{R}_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  et  $\mathfrak{R}_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ .



### 2.2 Vecteur vitesse d'un point M par rapport à un repère R

Par définition du vecteur vitesse, nous avons :  $\vec{V}_{(M/R_i)} = \left( \frac{d\vec{O_iM}}{dt} \right)_{R_i}$  et

$$\vec{V}_{(M/R_k)} = \left( \frac{d\vec{O_kM}}{dt} \right)_{R_k}$$

Le vecteur position  $\vec{O_iM}$  se calcule grâce à la relation de CHASLES. On a alors  $\vec{O_iM} = \vec{O_iO_k} + \vec{O_kM}$ .

$$\text{donc : } \left( \frac{d\vec{O_iM}}{dt} \right)_{R_i} = \left( \frac{d\vec{O_iO_k}}{dt} \right)_{R_i} + \left( \frac{d\vec{O_kM}}{dt} \right)_{R_i}$$

La dérivation vectorielle permet d'écrire :

$$\left( \frac{d\vec{O_i M}}{dt} \right)_{R_i} = \left( \frac{d\vec{O_i O_k}}{dt} \right)_{R_i} + \left( \frac{d\vec{O_k M}}{dt} \right)_{R_k} + \vec{\Omega}_{k/i} \wedge \vec{O_k M} .$$

Soit

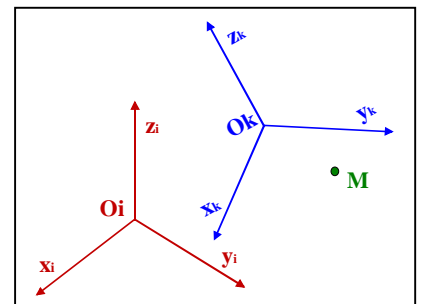
$$\vec{V}_{(M/R_i)} = \vec{V}_{(O_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M} + \vec{V}_{(M/R_k)}$$

$$\vec{V}_{(M/R_i)} = \vec{V}_{(M/R_k)} + \vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} \text{ avec}$$

$$\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} = \vec{V}_{(O_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M}$$

On emploie communément le langage suivant :

- $\vec{V}_{(M/R_i)}$  est le vecteur vitesse absolue du point M pour un observateur lié au repère  $R_i$ ,
- $\vec{V}_{(M/R_k)}$  est le vecteur vitesse relative du point M pour un observateur lié au repère  $R_k$ ,
- $\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} = \vec{V}_{(O_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M}$  est le vecteur vitesse d'entraînement du point M dans le mouvement du repère  $R_k$  par rapport au repère  $R_i$ , c'est le vecteur vitesse du point M appartenant au repère  $R_k$  pour un observateur lié au repère  $R_i$ .



## 2.2.1 Propriétés du vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)}$

### 2.2.1.1 Première propriété : $\vec{V}_{(M \in R_i/R_k)} = -\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)}$

L'antisymétrie par rapport aux indices se démontre aisément. En effet :

$$\vec{V}_{(M/R_i)} = \vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} + \vec{V}_{(M/R_k)}$$

$$\vec{V}_{(M/R_k)} = \vec{V}_{(M \in R_i/R_k)} + \vec{V}_{(M/R_i)}$$

En additionnant ces deux équations, on obtient bien :

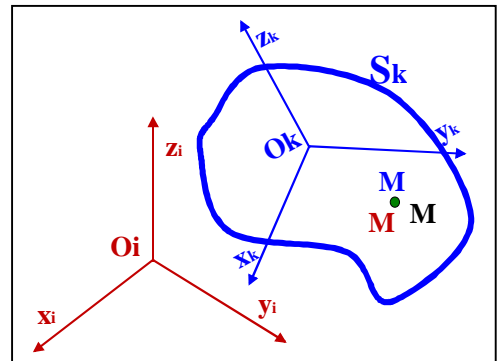
$$\vec{V}_{(M \in R_i/R_k)} = -\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)}$$

2.2.1.2 Seconde propriété : Existence d'un torseur cinématique pour modéliser le mouvement d'entraînement

La relation  $\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} = \vec{V}_{(O_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M}$  peut s'écrire avec plus de précision.

Ecrivons le vecteur vitesse  $\vec{V}_{(O_k/R_i)}$  en précisant que le point  $O_k$  est fixe dans  $R_k$ .

$\vec{V}_{(O_k/R_i)}$  se met alors sous la forme :  $\vec{V}_{(O_k \in R_k/R_i)}$ .



Finalement,

$$\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} = \vec{V}_{(O_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M} = \vec{V}_{(O_k \in R_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M}$$

$$\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} = \vec{V}_{(O_k \in R_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M}$$

Cette dernière relation vectorielle montre l'existence d'un champ antisymétrique (voir cours outils de la mécanique). De plus, en Cinématique du solide, le solide  $S_k$  est lié au repère  $R_k$ , le point  $M$  appartenant au solide  $S_k$  n'a aucun mouvement par rapport au repère  $R_k$ , donc :  $\vec{V}_{(M \in S_k/R_k)} = \vec{V}_{(M \in R_k/R_k)} = \vec{0}$ .

La relation de changement de point donne naissance au torseur suivant :

$$\mathbf{V}_{R_k/R_i} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \\ \vec{V}_{(O_k \in R_k/R_i)} \end{Bmatrix}_{O_k} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \\ \vec{V}_{(M \in R_k/R_i)} = \vec{V}_{(O_k \in R_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{R_k/R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M} \end{Bmatrix}_M$$

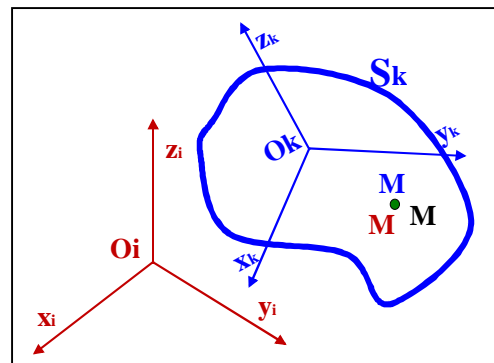
- $\vec{V}_{(M \in R_k/R_i)}$  se lit : "vitesse du point  $M$  appartenant au solide  $S_k$  par rapport au repère  $R_i$ ".
- $\vec{\Omega}_{R_k/R_i}$  est appelé taux de rotation instantanée du repère  $R_k$  (ou du solide  $S_k$ ) par rapport au repère  $R_i$  (ou au solide  $S_i$ ).

2.2.1.2.1 Point coïncident  $M_i(t)$

Un point  $M$ , appartenant au solide  $S_k$  en mouvement par rapport à un repère  $R_i$ , coïncide à chaque instant avec un point du repère  $R_i$ . Ce point est dit coïncident du point  $M$  à l'instant  $t$ .

$M$  est appelé point mobile et  $M_i(t)$  est appelé point coïncident à l'instant  $t$ .

Dans le modèle de l'espace physique, au point  $M$  lié au repère  $R_i$ , on trouve donc les deux points différents suivants :



- Le point **M**, modélisé par un point matériel,
- Le point **M** lié au solide  $S_k$  donc au repère  $R_k$ .

## 2.3 Champ des vecteurs-accélération

### 2.3.1 Changement de repère

$$\vec{\Gamma}_{(M/R_i)} = \left( \frac{d\vec{V}_{(M/R_i)}}{dt} \right)_{R_i} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_{(M/R_k)} = \left( \frac{d\vec{V}_{(M/R_k)}}{dt} \right)_{R_k}$$

En dérivant vectoriellement  $\vec{V}_{(M/R_i)} = \vec{V}_{(O_k/R_i)} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M} + \vec{V}_{(M/R_k)}$  par rapport au temps dans le repère  $R_i$ ,

$$\vec{\Gamma}_{(M/R_i)} = \left( \frac{d\vec{V}_{(M/R_i)}}{dt} \right)_{R_i} = \left( \frac{d\vec{V}_{(O_k/R_i)}}{dt} \right)_{R_i} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M}}{dt} \right)_{R_i} + \left( \frac{d\vec{V}_{(M/R_k)}}{dt} \right)_{R_i}$$

En utilisant la dérivation vectorielle :

$$\vec{\Gamma}_{(M/R_i)} = \vec{\Gamma}_{(O_k/R_i)} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{Rk/Ri}}{dt} \right)_{R_i} \wedge \vec{O_k M} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \left( \frac{d\vec{O_k M}}{dt} \right)_{R_i} + \vec{\Gamma}_{(M/R_k)} + \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{V}_{(M/R_k)} \right)$$

$$\vec{\Gamma}_{(M/R_i)} = \vec{\Gamma}_{(O_k/R_i)} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{Rk/Ri}}{dt} \right)_{R_i} \wedge \vec{O_k M} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M} \right) + \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{V}_{(M/R_k)} \right) + \vec{\Gamma}_{(M/R_k)} + \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{V}_{(M/R_k)} \right)$$

Finalement :

$$\vec{\Gamma}_{(M/R_i)} = \vec{\Gamma}_{(O_k/R_i)} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{Rk/Ri}}{dt} \right)_{R_i} \wedge \vec{O_k M} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M} \right) + \vec{\Gamma}_{(M/R_k)} + 2 \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{V}_{(M/R_k)} \right)$$

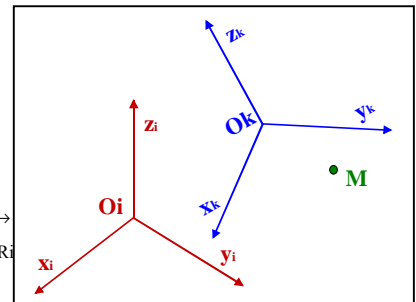
On emploie communément le langage suivant :

•  $\vec{\Gamma}_{(M/R_i)}$  vecteur accélération absolue du point **M** pour un observateur lié au repère  $R_i$ ,

•  $\vec{\Gamma}_{(M/R_k)}$  vecteur accélération relative du point **M** pour un observateur lié au repère  $R_k$ ,

•  $\vec{\Gamma}_{(M \in R_k / R_i)} = \vec{\Gamma}_{(O_k/R_i)} + \left( \frac{d\vec{\Omega}_{Rk/Ri}}{dt} \right)_{R_i} \wedge \vec{O_k M} + \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{O_k M} \right) + \vec{\Gamma}_{(M/R_k)} + 2 \left( \vec{\Omega}_{Rk/Ri} \wedge \vec{V}_{(M/R_k)} \right)$

vecteur accélération d'entraînement du point **M** dans le mouvement du repère  $R_k$  par rapport au repère  $R_i$ ,



c'est donc l'accélération du point  $M$  appartenant au repère  $R_k$  pour un observateur lié au repère  $R_i$ ,

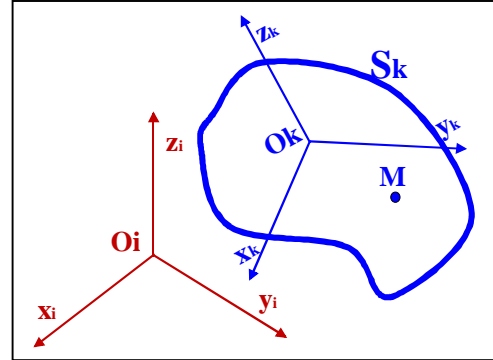
•  $2 \cdot \left( \overrightarrow{\Omega_{R_k/R_i}} \wedge \overrightarrow{V_{(M/R_k)}} \right)$  est le vecteur accélération de CORIOLIS.

**2.3.2 Vecteur accélération d'entraînement**  $\overrightarrow{\Gamma_{(M \in R_k / R_i)}}$

- En Cinématique du solide, le solide  $S_k$  est lié au repère  $R_k$ , le point  $M$  appartenant au solide  $S_k$  n'a aucun mouvement par rapport au repère

$R_k$ , donc :  $\overrightarrow{V_{(M \in S_k / R_k)}} = \overrightarrow{V_{(M \in R_k / R_k)}} = \vec{0}$  et

$\overrightarrow{\Gamma_{(M \in R_k / R_k)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(M \in S_k / R_k)}} = \vec{0}$ .



Le champ des vecteurs-accélération s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(M \in S_k / R_i)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(O_k / R_i)}} + \left( \frac{d\overrightarrow{\Omega_{S_k/R_i}}}{dt} \right)_{R_i} \wedge \overrightarrow{O_k M} + \overrightarrow{\Omega_{S_k/R_i}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega_{S_k/R_i}} \wedge \overrightarrow{O_k M} \right)$$

Ce champ de vecteurs n'est pas anti-symétrique, il n'existe donc pas de tenseur d'accélération pour modéliser le mouvement d'entraînement.