-EXERCICE 9.3-

• ENONCE :

« Analogie mécanique-optique »

• Une plage est repérée par un repère Oxy : l'axe Ox est parallèle au bord de mer (il « matérialise » la limite entre sable et eau), et l'axe Oy lui est perpendiculaire, dans le plan horizontal.

• Le sable se trouve du côté des ordonnées négatives et l'eau du côté des ordonnées positives.

1) Une personne (A), située à l'origine du repère O et assimilée à un point matériel), reconnaît une personne (B) immobile située dans l'eau en un point $M(x_1, y_1)$, avec x_1 et $y_1 \succ 0$; la vitesse **sur le sable** de la personne (A) est 5 fois supérieure à sa vitesse **dans l'eau** (les vitesses respectives sont constantes dans chacun des milieux).

Déterminer l'abscisse x du point (E) où la personne (A) doit entrer dans l'eau pour atteindre le plus rapidement possible la personne (B) .

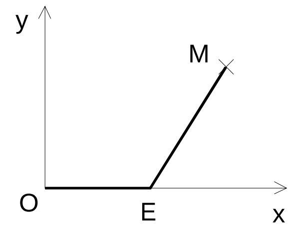
2) La position initiale de (A) est maintenant le point $I(0,Y)$, avec $Y \prec 0$; (A) choisit encore la trajectoire de durée minimale.

a) Calculer le rapport des sinus des trajectoires de (A), sur le sable et dans l'eau, avec l'axe Oy.
b) Faire une analogie avec l'Optique Géométrique.

• CORRIGE :

«Analogie mécanique-optique »

1)



En appelant v la vitesse de (A) sur le sable, la durée t du trajet est donnée par:

$$t = \frac{OE}{v} + \frac{EM}{v/5} \Rightarrow vt = OE + 5EM = x + 5\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}$$

• La vitesse v étant constante, la durée minimale est déterminée par :

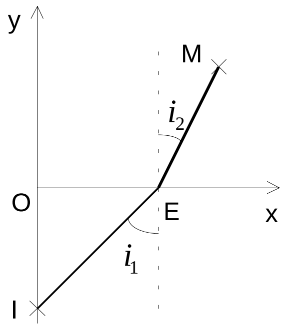
$$\frac{d(vt)}{dx} = 0 \Rightarrow 1 + 5\times\frac{2(x_1 - x)}{2\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2} = 5(x_1 - x) \Rightarrow (x_1 - x)^2 + y_1^2 = 25(x_1 - x)^2$$

$$\Rightarrow 24(x_1 - x)^2 = y_1^2 \Rightarrow x = x_1 \pm \frac{y_1}{24}.$$

• Pour l'instant, on a les 2 abscisses qui rendent extremum la durée t ; sur le schéma, il est évident que le **minimum** correspond à $x \prec x_1$, d'où :

$$\boxed{x = x_1 - \frac{y_1}{\sqrt{24}} \simeq x_1 - 0,204 y_1}$$

2)a)



On a toujours une relation du type :

$$vt = IE + 5EM \Rightarrow vt = \sqrt{x^2 + Y^2} + 5\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(vt)}{dx} = 0 \text{ pour : } \frac{x}{\sqrt{x^2 + Y^2}} + 5\times\frac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} = 0$$

D'où : $\frac{x}{\sqrt{x^2 + Y^2}} = 5\times\frac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}}$ ⇒ sur le schéma, on voit que l'on obtient : $\boxed{\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = 5}$ (1)

b) En optique géométrique, la loi de Descartes concernant la **réfraction** donnerait :

$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$, où n_1 est l'**indice** optique du milieu (1) (ici, le sable) et n_2 est l'**indice** optique du milieu (2) (ici, l'eau).

Par ailleurs, l'indice optique est également défini par le rapport de la célérité de la lumière dans le vide et dans le milieu considéré :

$n = \frac{c}{v} \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$; dans le cas du sable et de l'eau, on aurait : $\frac{v_1}{v_2} = 5 \Rightarrow$ la relation (1), traduisant la réfraction d'une vitesse **mécanique**, est bien analogue à la réfraction en **optique**.