

**-EXERCICE 27.6-**• **ENONCE** :

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

On considère une distribution de courants cylindriques autour d'un axe Oz telle que tout plan (P) contenant Oz est plan **d'antisymétrie** de cette distribution; en outre, on suppose **connu** le champ **sur l'axe** Oz : on peut prendre pour exemple la spire, le solénoïde de longueur finie, le cône etc ...

En notant  $\vec{B}_0(z)$  le champ sur l'axe, déterminer le champ  $\vec{B}(M)$  en un point M « proche » de l'axe.

Rq : on envisagera une approximation du 1<sup>er</sup> ordre, puis du 2<sup>ème</sup> ordre.

• **CORRIGE :**

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

♦ Si tout plan (P) contenant Oz est plan d'antisymétrie, alors le champ sur l'axe est porté par Oz et donc :  $\vec{B}_0(z) = B_0(z)\vec{e}_z$  ; par ailleurs, si l'on considère un point M n'appartenant pas à l'axe, le plan MOz est également d'antisymétrie  $\Rightarrow \vec{B}(M) \in$  ce plan  $\Rightarrow \boxed{B_\theta(M) = 0}$  (coord.cylind.)

♦ Nous allons donc développer les composantes du champ au voisinage de  $r=0$  :

$$B_r(r, z) = B_r(0, z) + r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} + \frac{r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} \right|_{r=0} + o(r^2)$$

$$B_z(r, z) = B_z(0, z) + r \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{r=0} + \frac{r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{r=0} + o(r^2)$$

Nous savons déjà que  $B_r(0, z) = 0$  (sur l'axe, le champ n'a pas de composante radiale) ; de plus, en choisissant un point M' symétrique de M par rapport à un plan (P) contenant l'axe Oz, on a :

$\vec{B}(M') = \text{sym}\{\vec{B}(M)\}/(P)$ , puisque (P) est un **plan d'antisymétrie des courants** et  $\vec{B}$  un **pseudo-vecteur**. Dire que :  $\vec{B}(M') = \text{sym}\{\vec{B}(M)\}/(P) \Leftrightarrow B_z(M') = B_z(M)$  et :  $B_r(M') = -B_r(M)$

Enfin, passer de M à M' revient à changer r en -r, on peut donc en conclure :

$B_z(r, z) =$  fonction **PAIRE** de r et :  $B_r(r, z) =$  fonction **IMPAIRE** de r ; il vient alors :

$$B_r(r, z) = r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} + o(r^2) \quad \text{et} \quad B_z(r, z) = B_0(z) + \frac{r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{r=0} + o(r^2)$$

♦ Pour le calcul de  $B_r(r, z)$ , nous proposons deux méthodes :

1) L'opérateur « div » est donné en coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \times r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} \right\} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} ; \text{ d'où :}$$

$$\boxed{B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}} \quad (1)$$

(en négligeant le terme du 3<sup>ème</sup> ordre en r obtenu si l'on tenait compte de  $\left. \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{r=0}$ )

**Rq :** il est très important ici de distinguer si un terme dépend ou non de telle ou telle

variable ; par exemple :  $\left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0}$  n'est plus une fonction de r  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} \right) = 2r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0}$

2) On ne connaît pas la divergence en coordonnées cylindriques : on traduit alors la nullité du flux de  $\vec{B}$  à travers une surface **fermée** judicieusement choisie. Cette dernière sera l'enveloppe d'un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de longueur dz ; on peut remarquer que :

• la surface latérale du cylindre est orientée par un vecteur  $d\vec{S}$  radial  $\Rightarrow$  pour calculer le flux  $\iint_{\text{surf.lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , il suffira de considérer la composante  $B_r$  du champ.

## EXERCICE D'ORAL

• les surfaces de base du cylindre sont orientées par  $\vec{e}_z$  en  $z+dz$  et par  $(-\vec{e}_z)$  en  $z \Rightarrow$  pour calculer le flux à travers ces surfaces, il suffira de prendre en compte la composante  $B_z$  ; d'où :

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi r dz B_r(r, z) + \pi r^2 B_z(r, z) \Big|_{z+dz} - \pi r^2 B_z(r, z) \Big|_z = 0 \Rightarrow \text{pour } dz \rightarrow 0 :$$

$$\lim \left[ r \frac{B_z(r, z) \Big|_{z+dz} - B_z(r, z) \Big|_z}{dz} \right] = r \frac{\partial B_z}{\partial z} = -2B_r(r, z) = r \frac{dB_0(z)}{dz}, \text{ toujours en négligeant le terme du}$$

$$3^{\text{eme}} \text{ ordre dû à } \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \Big|_{r=0} \Rightarrow \text{on retrouve bien : } B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}$$

♦ Si l'on travaille au second ordre en  $r$ , il faut calculer  $\frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \Big|_{r=0}$  ; dans le **vide** :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \text{pour la 2ème composante: } \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}$$

$$\Rightarrow B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \quad (2)$$