

-EXERCICE 27.6-• **ENONCE** :

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

On considère une distribution de courants cylindriques autour d'un axe Oz telle que tout plan (P) contenant Oz est plan **d'antisymétrie** de cette distribution; en outre, on suppose **connu** le champ **sur l'axe** Oz : on peut prendre pour exemple la spire, le solénoïde de longueur finie, le cône etc ...

En notant $\vec{B}_0(z)$ le champ sur l'axe, déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en un point M « proche » de l'axe.

Rq : on envisagera une approximation du 1^{er} ordre, puis du 2^{ème} ordre.

• **CORRIGE :**

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

♦ Si tout plan (P) contenant Oz est plan d'antisymétrie, alors le champ sur l'axe est porté par Oz et donc : $\vec{B}_0(z) = B_0(z)\vec{e}_z$; par ailleurs, si l'on considère un point M n'appartenant pas à l'axe, le plan MOz est également d'antisymétrie $\Rightarrow \vec{B}(M) \in$ ce plan $\Rightarrow \boxed{B_\theta(M) = 0}$ (coord.cylind.)

♦ Nous allons donc développer les composantes du champ au voisinage de $r=0$:

$$B_r(r, z) = B_r(0, z) + r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} + \frac{r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} \right|_{r=0} + o(r^2)$$

$$B_z(r, z) = B_z(0, z) + r \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{r=0} + \frac{r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{r=0} + o(r^2)$$

Nous savons déjà que $B_r(0, z) = 0$ (sur l'axe, le champ n'a pas de composante radiale) ; de plus, en choisissant un point M' symétrique de M par rapport à un plan (P) contenant l'axe Oz, on a :

$\vec{B}(M') = \text{sym}\{\vec{B}(M)\}/(P)$, puisque (P) est un **plan d'antisymétrie des courants** et \vec{B} un **pseudo-vecteur**. Dire que : $\vec{B}(M') = \text{sym}\{\vec{B}(M)\}/(P) \Leftrightarrow B_z(M') = B_z(M)$ et : $B_r(M') = -B_r(M)$

Enfin, passer de M à M' revient à changer r en -r, on peut donc en conclure :

$B_z(r, z) =$ fonction **PAIRE** de r et : $B_r(r, z) =$ fonction **IMPAIRE** de r ; il vient alors :

$$B_r(r, z) = r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} + o(r^2) \quad \text{et} \quad B_z(r, z) = B_0(z) + \frac{r^2}{2} \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{r=0} + o(r^2)$$

♦ Pour le calcul de $B_r(r, z)$, nous proposons deux méthodes :

1) L'opérateur « div » est donné en coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \times r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} \right\} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} ; \text{ d'où :}$$

$$\boxed{B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}} \quad (1)$$

(en négligeant le terme du 3^{ème} ordre en r obtenu si l'on tenait compte de $\left. \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{r=0}$)

Rq : il est très important ici de distinguer si un terme dépend ou non de telle ou telle

variable ; par exemple : $\left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0}$ n'est plus une fonction de r $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0} \right) = 2r \left. \frac{\partial B_r}{\partial r} \right|_{r=0}$

2) On ne connaît pas la divergence en coordonnées cylindriques : on traduit alors la nullité du flux de \vec{B} à travers une surface **fermée** judicieusement choisie. Cette dernière sera l'enveloppe d'un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de longueur dz ; on peut remarquer que :

• la surface latérale du cylindre est orientée par un vecteur $d\vec{S}$ radial \Rightarrow pour calculer le flux $\iint_{\text{surf.lat}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$, il suffira de considérer la composante B_r du champ.

EXERCICE D'ORAL

• les surfaces de base du cylindre sont orientées par \vec{e}_z en $z+dz$ et par $(-\vec{e}_z)$ en $z \Rightarrow$ pour calculer le flux à travers ces surfaces, il suffira de prendre en compte la composante B_z ; d'où :

$$\oiint_{\text{cylindre}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2\pi r dz B_r(r, z) + \pi r^2 B_z(r, z) \Big|_{z+dz} - \pi r^2 B_z(r, z) \Big|_z = 0 \Rightarrow \text{pour } dz \rightarrow 0 :$$

$$\lim \left[r \frac{B_z(r, z) \Big|_{z+dz} - B_z(r, z) \Big|_z}{dz} \right] = r \frac{\partial B_z}{\partial z} = -2B_r(r, z) = r \frac{dB_0(z)}{dz}, \text{ toujours en négligeant le terme du}$$

$$3^{\text{eme}} \text{ ordre dû à } \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \Big|_{r=0} \Rightarrow \text{on retrouve bien : } B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}$$

♦ Si l'on travaille au second ordre en r , il faut calculer $\frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \Big|_{r=0}$; dans le **vide** :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \text{pour la 2ème composante: } \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}$$

$$\Rightarrow B_z(r, z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \quad (2)$$