-EXERCICE 27.5-

• **ENONCE :**

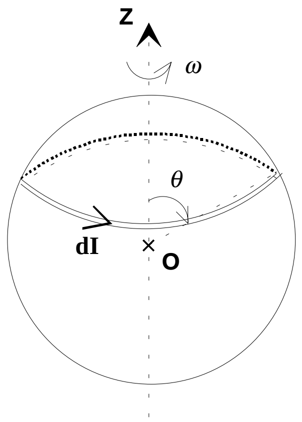
« Champ créé par une sphère chargée en rotation »

On s'intéresse à une sphère de rayon R, portant une charge totale Q uniformément répartie à sa surface ; la sphère tourne autour de l'un de ses diamètres à la vitesse angulaire constante ω.

1) Calculer le champ magnétique au centre de la sphère.
2) Déterminer le moment magnétique de cette sphère.

• **CORRIGE :** « Champ créé par une sphère chargée en rotation »

1) Nous allons travailler avec les notations de la figure ci-dessous :



La sphère est de rayon R

La surface est découpée en couronnes de largeur angulaire $d\theta$

Le champ est porté par Oz

♦ Dans le référentiel fixe, les charges surfaciques en mouvement sont assimilables à des **courants** ; les charges décrivant des cercles d'axe Oz, la sphère pourra être considérée comme la superposition de **spires circulaires** de rayon $r = R\sin(\theta)$, parcourues par des courants élémentaires dI.

♦ La vitesse de rotation étant constante, un observateur extérieur verra passer la charge dQ portée par une couronne élémentaire de largeur angulaire $d\theta$ pendant un temps T égal à la période de rotation de la sphère ; on a donc :

$$dI = \frac{dQ}{T} = \sigma dS\,\frac{\omega}{2\pi} = \frac{Q\omega}{(4\pi R^2)2\pi}dS \quad (\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \text{ représente la charge surfacique de la sphère})$$

Les couronnes, de rayon $r = R\sin\theta$, sont de « hauteur » $Rd\theta \Rightarrow dS = (2\pi R\sin\theta)Rd\theta$; d'où :

$$dI = \frac{Q\omega\sin\theta}{4\pi}d\theta$$

♦ Par ailleurs, tout plan contenant l'axe Oz est plan d'antisymétrie des courants ⇒ $\vec{B}(O)$ est **porté par Oz** (ou bien : le plan perpendiculaire à Oz, passant par O, est un plan de symétrie des sources ⇒ $\vec{B}(O)$ est perpendiculaire à ce plan, donc parallèle à Oz) ; de plus, le résultat de l'exercice 28.1 permet d'exprimer le champ créé par une spire élémentaire en O :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 dI}{2r}\sin^3(\theta) \Rightarrow \vec{B}(O) = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 Q\omega}{8\pi R}\sin^3(\theta)d\theta\,\vec{e}_z \;;\; \sin^3(\theta)d\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = (u^2-1)du$$

avec : $u = \cos\theta$; on trouve : $\int_1^{-1}(u^2-1)du = 4/3 \;\Rightarrow$ $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi R}\vec{e}_z}$

2) Chaque spire présente le moment magnétique élémentaire :
$d\vec{m} = S(\theta)dI\vec{e}_z$ où : $S(\theta)$ représente la surface d'une spire vue sous l'angle θ depuis le point O, et dI le courant précédemment calculé ; $S(\theta) = \pi r^2 = \pi R^2\sin^2(\theta)$, d'où :

$$\boxed{\vec{m} = \frac{Q\omega\pi R^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin^3(\theta)d\theta\vec{e}_z = \frac{Q\omega R^2}{3}\vec{e}_z}$$