Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \\ x+17y+4z=0 \end{cases}$

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 3x-2y+2z-3t=2 \\ 5x+y-z+2t=-1 \\ 2x-y+z-3t=4 \end{cases}$

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+y+z+t+u=7 \\ 3x+2y+z+t-3u=-2 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ 5x+4y+3z+3t-u=12 \end{cases}$

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} x+3y-2z+5t-7u=3 \\ x+2y-9z+4t-6u=-1 \\ 2x-y+7z-3t+5u=2 \\ x-y-2t+3u=2 \end{cases}$

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Résoudre le système (S) $\begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+2t=-7 \\ 4x-6y+3z+t=-8 \end{cases}$

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

La solution générale de (S) est la droite vectorielle engendrée par $(11, 1, -7)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Le système (S) ne possède aucune solution.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La solution générale de (S) est définie par :

$$(x, y, z, t, u) = (-16, 23, 0, 0, 0) + z(1, -2, 1, 0, 0) + t(1, -2, 0, 1, 0) + u(5, -6, 0, 0, 1).$$

C'est un sous-espace affine de dimension 3.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Le système (S) ne possède aucune solution.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

L'unique solution du système est $(x, y, z, t) = (-10, -7, -5, 5)$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes du système :

$$\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \\ 3x-5y+4z=0 \\ x+17y+4z=0 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow 2\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 3\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4-\mathrm{L}_1 \end{matrix} \begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 7y+z=0 \\ 2(7y+z)=0 \\ 2(7y+z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11y \\ z=-7y \end{cases}$$

La solution générale de (S) s'écrit donc $(x,y,z)=y(11,1,-7)$, avec $y\in\mathbb{K}$.
C'est la droite vectorielle engendrée par $(11,1,-7)$ (la matrice du système est de rang 2.)

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On applique $\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2$ et $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2+2\mathrm{L}_1$, puis $\mathrm{L}_2 \leftarrow 2\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_4$.

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 3x-2y+2z-3t=2 \\ 5x+y-z+2t=-1 \\ 2x-y+z-3t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 7x-t=4 \\ 10x=2 \\ 4x-2t=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ 10x=3 \\ 10x=2 \\ 4x-2t=5 \end{cases}$$

On constate que le système (S) ne possède aucune solution.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes du système :

$$(S)\begin{cases} x+y+z+t+u=7 \\ 3x+2y+z+t-3u=-2 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ 5x+4y+3z+3t-u=12 \end{cases} \begin{matrix} \mathrm{L}_2 \leftarrow 3\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow 5\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_4 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} x+y+z+t+u=7 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ y+2z+2t+6u=23 \\ y+2z+2t+6u=23 \end{cases}$$

Ce dernier système se réduit à ses deux premières équations. Ainsi :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t+u=7 \\ y+2z+2t+6u=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z-t-5u=-16 \\ y+2z+2t+6u=23 \end{cases}$$

La solution générale de (S) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (x,y,z,t,u) &= (-16+z+t+5u, 23-2z-2t-6u, z, t, u) \\ &= (-16,23,0,0,0)+z(1,-2,1,0,0)+t(1,-2,0,1,0)+u(5,-6,0,0,1) \end{aligned}$$

On obtient ainsi un espace affine de dimension 3 :

- Passant par le point $A=(-16,23,0,0,0)$ (une solution particulière du système.)
- De direction l'espace engendré par $\varepsilon_1=(1,-2,1,0,0)$, $\varepsilon_2=(1,-2,0,1,0)$, $\varepsilon_3=(5,-6,0,0,1)$.
  Ces vecteurs forment une base du noyau de la matrice du système (matrice de rang 2.)

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes du système :

$$\begin{cases} x+3y-2z+5t-7u=3 \\ x+2y-9z+4t-6u=-1 \\ 2x-y+7z-3t+5u=2 \\ x-y-2t+3u=2 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_4 \end{array} \quad \begin{cases} x+3y-2z+5t-7u=3 \\ y+7z+t-u=4 \\ 7y-11z+13t-19u=4 \\ 4y-2z+7t-10u=1 \end{cases}$$

Si on applique $\mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_4-\mathrm{L}_3$, on aboutit au système $\begin{cases} x+3y-2z+5t-7u=3 \\ y+7z+t-u=4 \\ y+7z+t-u=-2 \\ 4y-2z+7t-10u=1 \end{cases}$

Les lignes L_2 et L_3 de ce nouveau système sont manifestement incompatibles.

Conclusion : l'ensemble des solutions du système (S) est vide.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Les opérations $\begin{cases} \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-2\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4-\mathrm{L}_1 \end{cases}$ donnent $\begin{cases} x+y=-17 \\ 2x-y=-13 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=-10 \\ y=-7 \end{cases}$

On obtient alors $\begin{cases} 3z+t=-10 \\ 3z-t=-20 \end{cases}$ donc $\begin{cases} z=-5 \\ t=5 \end{cases}$

L'unique solution du système est donc $(x,y,z,t)=(-10,-7,-5,5)$.