Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 20 & -2 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le rang de la matrice A, carré d'ordre n, définie par $A = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On suppose $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Réaliser successivement les opérations $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On utilise des opérations sur les lignes de A. On trouve $\operatorname{rang} A = 3$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $\lambda \neq 3$, la matrice A est inversible.
- Si $\lambda = 3$, la matrice A est de rang 2.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On ne change pas le rang en ajoutant à L_1 la somme des autres lignes.

- Si $a = b = 0$, $\operatorname{rang} A = 0$; si $a = b \neq 0$, $\operatorname{rang} A = 1$
- Si $a = (1-n)b \neq 0$, $\operatorname{rang} A = n-1$; si $a \notin \{b, (1-n)b\}$, $\operatorname{rang} A = n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Constater que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. En déduire que la matrice A est de rang 2.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On réalise, *dans cet ordre*, les opérations $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

Alors $\text{rang}\, A = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 20 & -2 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + 5L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 8L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \\ \Longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 27 & 75 & -27 & 48 \\ 0 & 42 & 98 & -40 & 58 \\ 0 & 12 & 24 & -11 & 13 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/3 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ \Longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 25 & -9 & 16 \\ 0 & 21 & 49 & -20 & 29 \\ 0 & 12 & 24 & -11 & 13 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3 \\ \Longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 49 & -20 & 29 \\ 0 & 12 & 24 & -11 & 13 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Ainsi les matrices A et $B = \begin{pmatrix} 0 & 21 & 49 & -20 & 29 \\ 0 & 12 & 24 & -11 & 13 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix}$ ont le même rang.

Les lignes L_1, L_2 de B sont non proportionnelles, et la ligne L_3 (dont la première composante n'est pas nulle) n'est pas dans le plan engendré par L_1, L_2. On en déduit $\text{rang}\, A = \text{rang}\, B = 3$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A :

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \\ \Longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1+\lambda & 1-2\lambda \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & \lambda - 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 + (1-\lambda)L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ \Longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2(3-\lambda) & \lambda - 3 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Pour échelonner A, il reste à échanger L_2 et L_3.

Si $\lambda \neq 3$, la matrice A est inversible car $\text{rang}\, A = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4.$

Si $\lambda = 3$, $\text{rang}\, A = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On ne change pas le rang de A en ajoutant à la ligne L_1 la somme des autres lignes.

On obtient une matrice B dont la ligne L_1 s'écrit $(c, c, \ldots, c)$, avec $c = a + (n-1)b$.

– Cas général : $a \neq (1-n)b$.

Dans ce cas, on divise la ligne L_1 de B par $c = a + (n-1)b$. On a alors :

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b & a & b & \ldots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{pmatrix} \begin{array}{c} \forall i \in \{2,\ldots,n\} \\ \mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - b\mathrm{L}_1 \\ \Longrightarrow \end{array} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

On voit alors que si $a = b$ (avec $a + (n-1)b \neq 0$ c'est-à-dire $a = b \neq 0$), alors $\operatorname{rang} A = 1$.

En revanche, si $a \neq b$ (toujours avec $a \neq (1-n)b$) alors $\operatorname{rang} A = n$.

– Cas particulier : $a = (1-n)b$.

Si $b = 0$ (donc si $a = b = 0$) on a évidemment $\operatorname{rang} A = 0$.

Supposons donc $a = (1-n)b \neq 0$.

On peut alors supprimer la ligne nulle L_1 de B, et diviser le reste par b.

On en déduit $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1-n & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$ (matrice de type $(n-1) \times n$.)

On ne modifie pas le rang en appliquant les opérations $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i - \mathrm{C}_1$, pour tout $i \geq 2$.

On trouve donc $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \ldots & \ldots & 0 & -n \end{pmatrix} = n-1$.

Conclusion :

◇ Si $a = b = 0$, $\operatorname{rang} A = 0$; si $a = b \neq 0$, $\operatorname{rang} A = 1$

◇ Si $a = (1-n)b \neq 0$, $\operatorname{rang} A = n-1$; si $a \notin \{b, (1-n)b\}$, $\operatorname{rang} A = n$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On a $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ry - qz \\ -rx + pz \\ qx - py \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

Ainsi la matrice A représente le produit vectoriel par le vecteur $\omega = (p, q, r)$.

Le noyau de A est donc formé des vecteurs liés à (p, q, r).

On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, donc $\operatorname{rang} A = 2$.