Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 20 & -2 & 8 \\ 8 & 2 & 10 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 11 & -5 & 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Déterminer le rang de la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer le rang de la matrice A, carré d'ordre n, définie par $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On suppose $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$. Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Réaliser successivement les opérations $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On utilise des opérations sur les lignes de A. On trouve $\operatorname{rang} A = 3$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- Si $\lambda \neq 3$, la matrice A est inversible.
- Si $\lambda = 3$, la matrice A est de rang 2.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On ne change pas le rang en ajoutant à L_1 la somme des autres lignes.
- Si $a = b = 0,\ \operatorname{rang} A = 0\,;\quad$ si $a = b \neq 0,\ \operatorname{rang} A = 1$
- Si $a = (1-n)b \neq 0,\ \operatorname{rang} A = n-1\,;\quad$ si $a \notin \{b, (1-n)b\},\ \operatorname{rang} A = n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Constater que $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. En déduire que la matrice A est de rang 2.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On réalise, *dans cet ordre*, les opérations $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

Alors $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\end{pmatrix} = 2.$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A :

$$\begin{pmatrix}5&2&20&-2&8\\8&2&10&0&-6\\2&2&2&-1&-3\\-1&5&11&-5&8\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1+5L_4\\L_2 \leftarrow L_2+8L_4\\L_3 \leftarrow L_3+2L_4\\\Longrightarrow\end{matrix} \begin{pmatrix}0&27&75&-27&48\\0&42&98&-40&58\\0&12&24&-11&13\\-1&5&11&-5&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1/3\\L_2 \leftarrow L_2/2\\\Longrightarrow\end{matrix} \begin{pmatrix}0&9&25&-9&16\\0&21&49&-20&29\\0&12&24&-11&13\\-1&5&11&-5&8\end{pmatrix} \begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1-L_2+L_3\\\Longrightarrow\end{matrix} \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&21&49&-20&29\\0&12&24&-11&13\\-1&5&11&-5&8\end{pmatrix}$$

Ainsi les matrices A et $B = \begin{pmatrix}0&21&49&-20&29\\0&12&24&-11&13\\-1&5&11&-5&8\end{pmatrix}$ ont le même rang.

Les lignes L_1, L_2 de B sont non proportionnelles, et la ligne L_3 (dont la première composante n'est pas nulle) n'est pas dans le plan engendré par L_1, L_2. On en déduit $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = 3$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On procède par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A :

$$\begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2-\lambda L_1\\L_3 \leftarrow L_3-L_1\\L_4 \leftarrow L_4-4L_1\\\Longrightarrow\end{matrix} \begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&1-\lambda&1+\lambda&1-2\lambda\\0&-2&4&-5\\0&-2&4&\lambda-8\end{pmatrix} \begin{matrix}L_2 \leftarrow 2L_2+(1-\lambda)L_3\\L_4 \leftarrow L_4-L_3\\\Longrightarrow\end{matrix} \begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&0&2(3-\lambda)&\lambda-3\\0&-2&4&-5\\0&0&0&\lambda-3\end{pmatrix}$$

Pour échelonner A, il reste à échanger L_2 et L_3.

Si $\lambda \neq 3$, la matrice A est inversible car $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&4&-5\\0&0&-2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} = 4.$

Si $\lambda = 3$, $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-2&4&-5\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = 2.$

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On ne change pas le rang de A en ajoutant à la ligne L_1 la somme des autres lignes.

On obtient une matrice B dont la ligne L_1 s'écrit $(c, c, \ldots, c)$, avec $c = a + (n-1)b$.

– Cas général : $a \neq (1-n)b$.

  Dans ce cas, on divise la ligne L_1 de B par $c = a + (n-1)b$. On a alors :

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b & a & b & \ldots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{pmatrix} \underset{\Longrightarrow}{\overset{\forall i \in \{2,\ldots,n\}}{\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i - b\mathrm{L}_1}} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

  On voit alors que si $a = b$ (avec $a + (n-1)b \neq 0$ c'est-à-dire $a = b \neq 0$), alors $\operatorname{rang} A = 1$.

  En revanche, si $a \neq b$ (toujours avec $a \neq (1-n)b$) alors $\operatorname{rang} A = n$.

– Cas particulier : $a = (1-n)b$.

  Si $b = 0$ (donc si $a = b = 0$) on a évidemment $\operatorname{rang} A = 0$.

  Supposons donc $a = (1-n)b \neq 0$.

  On peut alors supprimer la ligne nulle L_1 de B, et diviser le reste par b.

  On en déduit $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1-n & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$ (matrice de type $(n-1) \times n$.)

  On ne modifie pas le rang en appliquant les opérations $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i - \mathrm{C}_1$, pour tout $i \geq 2$.

  On trouve donc $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \ldots & \ldots & 0 & -n \end{pmatrix} = n - 1$.

Conclusion :

◇ Si $a = b = 0$, $\operatorname{rang} A = 0$; si $a = b \neq 0$, $\operatorname{rang} A = 1$

◇ Si $a = (1-n)b \neq 0$, $\operatorname{rang} A = n - 1$; si $a \notin \{b, (1-n)b\}$, $\operatorname{rang} A = n$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On a $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ry - qz \\ -rx + pz \\ qx - py \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

Ainsi la matrice A représente le produit vectoriel par le vecteur $\omega = (p, q, r)$.

Le noyau de A est donc formé des vecteurs liés à (p, q, r).

On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} A = 1$, donc $\operatorname{rang} A = 2$.