Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Caractériser $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (Π) le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ et (D) la droite $\begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$

Déterminer la matrice A de la projection sur (Π) parallèlement à (D).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer l'inverse et les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On se donne $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Trouver le rang de f, son image, son noyau. Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.

Soit f une application linéaire de E vers F, de rang r.

On définit $\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}$.

Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ et en donner la dimension.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soient $(e), (\varepsilon)$ deux bases de E ($\dim E = n$), et $(e^*), (\varepsilon^*)$ leurs bases duales.

Soit P la matrice de passage de (e) à (ε) et P^* celle de (e^*) à (ε^*).

Exprimer P en fonction de P^*.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $A^2 = A$. Montrer que f est la projection sur le plan d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite engendrée par $c = (1, 1, 1)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Se placer dans $\mathbb{R}_4[X]$, muni de la base $1, X, X^2, X^3, X^4$.
Vérifier que A est la matrice de l'application $f : P(X) \mapsto P(X + 1)$.
Utiliser ensuite le fait que $f^n(P(X)) = P(X + n)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'image de f est la droite engendrée par (α, β, γ).

$\operatorname{Ker} f$ est le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Pour calculer A^n, on utilisera les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Considérer un supplémentaire F' de $\operatorname{Im} f$ dans F, et un supplémentaire E' de $\operatorname{Ker} f$ dans E.
Munir E et F de bases adaptées à ces sommes directes.
Caractériser alors les éléments de $\mathcal{G}$ par leur matrice dans ce couple de bases.
En déduire que $\dim \mathcal{G} = np - r^2$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Constater que le coefficient d'indice (i, j) de P est $e_i^*(\varepsilon_j)$.
Montrer que celui-ci est aussi le terme d'indice (j, i) de la matrice de passage Q^* de (ε^*) à (e^*).
En déduire l'égalité $P^* = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que $A^2 = A$. Ainsi f est une projection vectorielle.

Il reste à déterminer le noyau et les vecteurs invariants de f.

$$u=(x,y,z)\in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z.$$

$$u=(x,y,z)\in \operatorname{Inv} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=3x \\ -x+2y-z=3y \\ -x-y+2z=3z \end{cases} \Leftrightarrow x+y+z=0.$$

Conclusion : L'application f est la projection vectorielle :

◇ Sur plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$, engendré par les vecteurs $\begin{cases} a=(1,-1,0) \\ b=(1,0,-1) \end{cases}$

◇ Parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $c=(1,1,1)$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Soit $u(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $v=p(u)=(x',y',z')$. Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $v=u+\lambda(3,2,1)$.

On écrit que v est dans (Π) : $x'+2y'+3z'=0$ donc $\lambda=-\frac{1}{10}(x+2y+3z)$.

Ainsi $(x',y',z')=(x,y,z)-\frac{1}{10}(x+2y+3z)(3,2,1)$.

On en déduit $\begin{cases} x' = \frac{1}{10}(7x-6y-9z) \\ y' = \frac{1}{10}(-2x+6y-6z) \\ z' = \frac{1}{10}(-x-2y+7z) \end{cases}$ Donc $A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

L'idée est d'associer à la matrice A une application linéaire f très simple.

On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$, muni de la base canonique $1, X, X^2, X^3, X^4$.

On constate que $\begin{cases} f(1)=1,\ f(X)=1+X \\ f(X^2)=1+2X+X^2=(1+X)^2 \end{cases}$, $\begin{cases} f(X^3)=(1+X)^3 \\ f(X^4)=(1+X)^4 \end{cases}$

Par linéarité, on en déduit, pour tout polynôme : $f(P(X))=P(X+1)$.

Il est clair que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$, et que $f^{-1}(P(X))=P(X-1)$.

Il est tout aussi clair que, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $f(P(X))=P(X+n)$.

Ainsi $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, $\forall n\in\mathbb{Z},\ A^n=\begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 & n^4 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 & 4n^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3n & 6n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On note $\varepsilon = (\alpha, \beta, \gamma)$. Notons $(e) = e_1, e_2, e_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On constate que $f(e_1) = \alpha\varepsilon$, $f(e_2) = \beta\varepsilon$ et $f(e_3) = \gamma\varepsilon$.

Ainsi les $f(e_k)$ (qui engendrent $\operatorname{Im} f$) sont dans la droite $\mathbb{K}\varepsilon$ dirigée par ε.

Puisque $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, l'un au moins des $f(e_k)$ est non nul.

Ainsi l'application f est de rang 1 et $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}\varepsilon$.

Soit $u(x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$ On a $f(u) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

On a $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$. D'autre part $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

On en déduit : $A^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)A$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{n-1}A$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{G} \neq \emptyset$ car $g = 0$ convient. Soient g_1, g_2 dans $\mathcal{L}(F, E)$, et α_1, α_2 dans $\mathbb{K}$. On a :

$$f \circ (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \circ f = f \circ (\alpha_1 g_1 \circ f + \alpha_2 g_2 \circ f) = \alpha_1 f \circ g_1 \circ f + \alpha_2 f \circ g_2 \circ f = 0$$

Ainsi $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ appartient à $\mathcal{G}$, qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$.

Soient F' un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F, et E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.

On munit F d'une base $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$ adaptée à la somme directe $F = \operatorname{Im} f \oplus F'$.

Dans cette notation, (ε) est une base de $\operatorname{Im} f$, donc formée de r vecteurs.

On munit E d'une base $(e) \cup (e')$ adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Ker} f \oplus E'$.

Dans cette notation, (e) est une base de $\operatorname{Ker} f$, donc formée de $n - r$ vecteurs.

Soit g dans $\mathcal{L}(F, E)$, de matrice A dans les bases $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$ et $(e) \cup (e')$.

Dire que g est dans $\mathcal{G}$, c'est dire que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$, ou encore $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Ker} f$.

Cela équivaut à dire que A se décompose en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où B est une matrice quelconque de type $(r, n - r)$, le bloc nul étant une matrice carrée d'ordre r.

Dans cette notation, B est la matrice dans les bases (ε) et (e) de la restriction de g à $\operatorname{Im} f$ (cette restriction étant un morphisme quelconque de $\operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Ker} f$.)

On sait que l'application qui à un morphisme associe sa matrice dans une couple de bases donné est un isomorphisme. On en déduit que la dimension de $\mathcal{G}$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel des matrices A de la forme précédente, c'est-à-dire $np - r^2$.

Remarque : on vérifie que le résultat est correct même dans les “cas-limites” par exemple quand $r = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$) car alors on ne peut parler d'une base (ε) de $\operatorname{Im} f$. En effet dans ce cas, $\mathcal{G}$ est égal à $\mathcal{L}(F, E)$ tout entier et on a $\dim \mathcal{G} = np$.

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Pour tous $x \in E$, et $\varphi \in E^*$: $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^*(x)\varepsilon_i$ et $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j)e_j^* = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\varepsilon_j)\varepsilon_j^*$.

Le coefficient d'indice (i, j) de P est la composante de ε_j sur e_i, c'est-à-dire $e_i^*(\varepsilon_j)$.

Mais $e_i^*(\varepsilon_j)$ est aussi la composante de e_i^* sur ε_j^*, c'est-à-dire le terme d'indice (j, i) de la matrice de passage Q^* de (ε^*) à (e^*).

On en déduit que les matrices P et Q^* sont transposées l'une de l'autre.
Or P^*, matrice de passage de (e^*) à (ε^*), est l'inverse de la matrice Q^*.

On en déduit finalement que $P^* = (Q^*)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.