

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Donner une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui soit formée de matrices inversibles.

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer l'inverse de la matrice carrée  $A$  définie par  $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Préciser si la matrice carrée  $A$  définie par  $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible. Si elle est inversible, calculer  $A^{-1}$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer l'inverse de la matrice carrée  $A$  définie par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ddots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Montrer que  $H$  contient au moins une matrice inversible.

**EXERCICE 6** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère la matrice carrée  $A$  définie par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $A^2$  et  $A^3$ . Montrer que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

**EXERCICE 7** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

(*Théorème de Hadamard*)

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de terme général  $a_{ij}$ .

On dit que  $A$  est à diagonale strictement dominante si, pour tout  $j$ ,  $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ .

Montrer que dans ce cas la matrice  $A$  est inversible.

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  conviennent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Soit  $J$  la matrice telle que  $A = I - aJ$ . Calculer  $J^2, J^3, J^4$ .

En déduire  $A^{-1} = I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Si  $b = 0$ , c'est facile. On suppose donc  $b \neq 0$ .

Noter  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients valent 1.

Exprimer  $A$  en fonction de  $I$  et  $J$ . En déduire  $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b - a)(b(n - 1) + a)I$ .

En déduire que si  $a = b$  ou si  $a = (1 - n)b$ , la matrice  $A$  n'est pas inversible.

Sinon,  $A$  est inversible. On trouve  $\frac{a+(n-2)b}{d}$  sur la diagonale,  $-\frac{b}{d}$  ailleurs.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

$A$  est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Soit  $J$  la matrice de terme général  $J_{i,j} = 1$  si  $j = i + 1$  et 0 sinon.

Observer que  $A = I + 2J + 3J^2 + \dots + nJ^{n-1}$ .

Montrer que  $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I - M)^2(I + 2M + 3M^2 + \dots + nM^{n-1})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

En déduire  $A^{-1} = I - 2J + J^2$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

On considère les matrices  $E_{ij}$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Supposer qu'il existe un couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , tel que  $\varphi(E_{ij}) \neq 0$ .

Considérer alors les matrices  $A = I_n + \alpha E_{ij}$ .

Sinon, considérer  $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \dots + E_{n,n-1}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [[Retour à l'énoncé](#)]

Remarquer que  $A^3 = 6A - 4I$ . En déduire  $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6I) = \dots$

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [[Retour à l'énoncé](#)]

Se donner une matrice-colonne  $X$  de composantes  $x_j$ , et telle que  $AX = 0$ .

Soit  $x_i$  une composante de  $X$  de module maximum.

Montrer que  $|a_{ii}x_i| \leq |x_i| \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$ . En déduire  $x_i = 0$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Il suffit de prendre  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ces quatre matrices (inversibles) forment une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  (de dim. 4) car elles sont libres.

En effet  $aA + bB + cC + dD = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0, & a - b = 0 \\ c + d = 0, & c - d = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = d$

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Posons  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On a  $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $J^4 = 0$ .

On a  $I = I - a^4 J^4 = (I - aJ)(I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3) = A(I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3)$ .

On en déduit que l'inverse de  $A$  est  $A^{-1} = I + aJ + a^2 J^2 + a^3 J^3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Si  $b = 0$ , on a  $A = aI$  : dans ce cas  $A$  est inversible  $\Leftrightarrow a \neq 0$  et alors  $A^{-1} = \frac{1}{a}I$ .

On suppose donc  $b \neq 0$ . Notons  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients valent 1.

On a  $A = (a - b)I + bJ$ . D'autre part, il est clair que  $J^2 = nJ$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} A^2 &= (a - b)^2 I + 2b(a - b)J + b^2 J^2 = (a - b)^2 I + b(2(a - b) + nb)J \\ &= (a - b)^2 I + (2(a - b) + nb)(A - (a - b)I) \\ &= (2(a - b) + nb)A + (b - a)(b(n - 1) + a)I \end{aligned}$$

On a donc obtenu l'égalité :  $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b - a)(b(n - 1) + a)I$  (1)

◇ Si  $a = b$  (donc si  $A = bJ$ ), alors  $A(A - nbI) = 0$ .

◇ Si  $a = (1 - n)b$  (donc si  $A = b(J - nI)$ ), alors  $A(A + nbI) = 0$ .

Dans ces deux cas, la matrice  $A$  est un diviseur de zéro. Elle n'est donc pas inversible.

Sinon, c'est-à-dire si  $a \notin \{b, (1 - n)b\}$ , posons  $d = (a - b)(b(n - 1) + a)$ .

L'égalité (1) montre que  $A$  est inversible et :  $A^{-1} = \frac{1}{d}(-A + (nb - 2b + 2a)I)$ .

Posons  $K = J - I$  (diagonale nulle, les autres coefficients valant 1.)

Avec ces notations on a  $A = aI + bK$  et on en déduit :  $A^{-1} = \frac{a + (n - 2)b}{d}I - \frac{b}{d}K$ .

Ainsi les coefficients diagonaux de  $A^{-1}$  valent  $\frac{a + (n - 2)b}{d}$ , les autres sont égaux à  $-\frac{b}{d}$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4** [[Retour à l'énoncé](#)]

La matrice  $A$  est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Soit  $J$  la matrice de terme général  $J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Seuls les coefficients de  $J$  situés juste au-dessus de la diagonale sont  $\neq 0$  (ils valent 1.)

On connaît les puissances de  $J$ , on sait que  $J^n = 0$ , et on a  $A = I + 2J + 3J^2 + \dots + nJ^{n-1}$ .

Pour tout  $x$  réel distinct de 1, on a :

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = (1 + x + x^2 + \dots + x^n)' = \left( \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

L'égalité  $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (1-x)^2(1+2x+\dots+nx^{n-1})$  est vraie pour tout  $x \neq 1$ .

En fait c'est une identité valable dans toute algèbre, et en particulier dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , elle devient  $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I-M)^2(I+2M+3M^2+\dots+nM^{n-1})$ .

Avec  $M = J$ , on obtient  $I = (I-J)^2 A$ .

$$\text{On en déduit le résultat : } A^{-1} = (I-J)^2 = I - 2J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5** [[Retour à l'énoncé](#)]

Si on suit les indications de l'énoncé, on comprend qu'il va falloir construire une matrice inversible  $M$  telle que  $\varphi(M) = 0$ ,  $M$  étant construite à l'aide de matrices  $E_{ij}$ .

Pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , et tout scalaire  $\alpha$ , la matrice  $A = I_n + \alpha E_{ij}$  est inversible (car elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1).

Avec ces notations, on a  $\varphi(A) = \varphi(I_n) + \alpha\varphi(E_{ij})$ .

Supposons  $\varphi(E_{ij}) \neq 0$ . On constate que si  $\alpha = -\frac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{ij})}$ , alors  $\varphi(A) = 0$ .

On a donc prouvé que s'il existe un couple  $(i, j)$ , avec  $i \neq j$ , tel que  $\varphi(E_{ij}) \neq 0$ , alors il existe une matrice inversible  $A$  telle que  $\varphi(A) = 0$ .

Il reste à traiter le cas où  $\varphi$  s'annule sur toutes les matrices  $E_{ij}$  avec  $i \neq j$ .

Considérons alors la matrice  $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \dots + E_{n,n-1}$ .

Cette matrice est inversible (elle diffère de  $I_n$  par l'échange des colonnes 1 et  $n$ .)

Puisque par hypothèse  $\varphi$  s'annule sur toutes les  $E_{ij}$  avec  $i \neq j$ , il est clair que  $\varphi(A) = 0$ .

Conclusion : dans tous les cas, on a trouvé une matrice inversible  $A$  telle  $\varphi(A) = 0$ .

L'hyperplan  $H = \text{Ker } \varphi$  contient donc au moins une matrice inversible.

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6** [[Retour à l'énoncé](#)]

$$\text{On trouve } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & -6 & -6 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 6 & -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

On remarque que  $A^3 = 6A - 4I$ . Ainsi  $A(A^2 - 6I) = 4I$ .

$$\text{On en déduit que } A \text{ est inversible et que } A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7** [[Retour à l'énoncé](#)]

La matrice  $A$  est inversible si le seul vecteur colonne  $X$  tel  $AX = 0$  est  $X = 0$ .

Notons  $x_1, \dots, x_j, \dots, x_n$  les composantes de  $X$ , et  $x_i$  une composante de module maximum.

Si  $AX = 0$  alors la composante d'indice  $i$  de  $AX$  est nulle.

$$\text{Ainsi : } 0 = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j \text{ donc } |a_{ii}x_i| = \left| \sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

$$\text{Il en découle } |x_i| \left( |a_{ii}| - \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \right) \leq 0. \text{ Mais } |a_{ii}| - \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| > 0. \text{ On en déduit } |x_i| = 0.$$

Or  $x_i$  est une composante de module maximum dans  $X$ . On a donc  $X = 0$ .

Conclusion : la matrice  $A$  est inversible.