Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]
Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit formée de matrices inversibles.

Exercice 2 [Indication] [Correction]
Calculer l'inverse de la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]
Préciser si la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} a & b & \ldots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \ldots & b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.
Si elle est inversible, calculer A^{-1}.

Exercice 4 [Indication] [Correction]
Calculer l'inverse de la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ddots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]
Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

Exercice 6 [Indication] [Correction]
On considère la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer A^2 et A^3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7 [Indication] [Correction]
(*Théorème de Hadamard*)
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ de terme général a_{ij}.
On dit que A est à diagonale strictement dominante si, pour tout j, $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.
Montrer que dans ce cas la matrice A est inversible.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Soit J la matrice telle que $A = I - aJ$. Calculer J^2, J^3, J^4.
En déduire $A^{-1} = I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $b = 0$, c'est facile. On suppose donc $b \neq 0$.
Noter J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.
Exprimer A en fonction de I et J. En déduire $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b - a)(b(n-1) + a)I$.
En déduire que si $a = b$ ou Si $a = (1-n)b$, la matrice A n'est pas inversible.
Sinon, A est inversible. On trouve $\frac{a+(n-2)b}{d}$ sur la diagonale, $-\frac{b}{d}$ ailleurs.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

A est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.
Soit J la matrice de terme général $J_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.
Observer que $A = I + 2J + 3J^2 + \cdots + nJ^{n-1}$.
Montrer que $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I - M)^2(I + 2M + 3M^2 + \cdots + nM^{n-1})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire $A^{-1} = I - 2J + J^2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On considère les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposer qu'il existe un couple (i, j) avec $i \neq j$, tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$.
Considérer alors les matrices $A = \mathrm{I}_n + \alpha E_{ij}$.
Sinon, considérer $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \cdots + E_{n,n-1}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $A^3 = 6A - 4I$. En déduire $A^{-1} = \dfrac{1}{4}(A^2 - 6I) = \cdots$

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Se donner une matrice-colonne X de composantes x_j, et telle que $AX = 0$.
Soit x_i une composante de X de module maximum.
Montrer que $|a_{ii}x_i| \leq |x_i| \sum\limits_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$. En déduire $x_i = 0$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ces quatre matrices (inversibles) forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (de dim. 4) car elles sont libres.

En effet $aA + bB + cC + dD = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0, & a-b=0 \\ c+d=0, & c-d=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=d$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Posons $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^4 = 0$.

On a $I = I - a^4 J^4 = (I - aJ)(I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3) = A(I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3)$.

On en déduit que l'inverse de A est $A^{-1} = I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $b = 0$, on a $A = aI$: dans ce cas A est inversible$\Leftrightarrow a \neq 0$ et alors $A^{-1} = \frac{1}{a}I$.

On suppose donc $b \neq 0$. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

On a $A = (a-b)I + bJ$. D'autre part, il est clair que $J^2 = nJ$. On en déduit :

$$\begin{aligned} A^2 &= (a-b)^2 I + 2b(a-b)J + b^2J^2 = (a-b)^2 I + b(2(a-b)+nb)J \\ &= (a-b)^2 I + (2(a-b)+nb)(A - (a-b)I) \\ &= (2(a-b)+nb)A + (b-a)(b(n-1)+a)I \end{aligned}$$

On a donc obtenu l'égalité : $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b-a)(b(n-1)+a)I \quad (1)$

◇ Si $a = b$ (donc si $A = bJ$), alors $A(A - nbI) = 0$.

◇ Si $a = (1-n)b$ (donc si $A = b(J - nI)$), alors $A(A + nbI) = 0$.

Dans ces deux cas, la matrice A est un diviseur de zéro. Elle n'est donc pas inversible.

Sinon, c'est-à-dire si $a \notin \{b, (1-n)b\}$, posons $d = (a-b)(b(n-1)+a)$.

L'égalité (1) montre que A est inversible et : $A^{-1} = \dfrac{1}{d}(-A + (nb - 2b + 2a)I)$.

Posons $K = J - I$ (diagonale nulle, les autres coefficients valant 1.)

Avec ces notations on a $A = aI + bK$ et on en déduit : $A^{-1} = \dfrac{a+(n-2)b}{d}I - \dfrac{b}{d}K$.

Ainsi les coefficients diagonaux de A^{-1} valent $\dfrac{a+(n-2)b}{d}$, les autres sont égaux à $-\dfrac{b}{d}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Soit J la matrice de terme général $J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Seuls les coefficients de J situés juste au-dessus de la diagonale sont $\neq 0$ (ils valent 1.)

On connait les puissances de J, on sait que $J^n = 0$, et on a $A = I + 2J + 3J^2 + \cdots + nJ^{n-1}$.

Pour tout x réel distinct de 1, on a :

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

L'égalité $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (1-x)^2(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1})$ est vraie pour tout $x \neq 1$.

En fait c'est une identité valable dans toute algèbre, et en particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle devient $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I-M)^2(I + 2M + 3M^2 + \cdots + nM^{n-1})$.

Avec $M = J$, on obtient $I = (I-J)^2 A$.

On en déduit le résultat : $A^{-1} = (I-J)^2 = I - 2J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si on suit les indications de l'énoncé, on comprend qu'il va falloir construire une matrice inversible M telle que $\varphi(M) = 0$, M étant construite à l'aide de matrices E_{ij}.

Pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, et tout scalaire α, la matrice $A = \mathrm{I}_n + \alpha E_{ij}$ est inversible (car elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1).

Avec ces notations, on a $\varphi(A) = \varphi(\mathrm{I}_n) + \alpha\varphi(E_{ij})$.

Supposons $\varphi(E_{ij}) \neq 0$. On constate que si $\alpha = -\dfrac{\varphi(\mathrm{I}_n)}{\varphi(E_{ij})}$, alors $\varphi(A) = 0$.

On a donc prouvé que s'il existe un couple (i,j), avec $i \neq j$, tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$, alors il existe une matrice inversible A telle que $\varphi(A) = 0$.

Il reste à traiter le cas où φ s'annule sur toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$.

Considérons alors la matrice $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \cdots + E_{n,n-1}$.

Cette matrice est inversible (elle diffère de I_n par l'échange des colonnes 1 et n.)

Puisque par hypothèse φ s'annule sur toutes les E_{ij} avec $i \neq j$, il est clair que $\varphi(A) = 0$.

Conclusion : dans tous les cas, on a trouvé une matrice inversible A telle $\varphi(A) = 0$.

L'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$ contient donc au moins une matrice inversible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & -6 & -6 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 6 & -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^3 = 6A - 4I$. Ainsi $A(A^2 - 6I) = 4I$.

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{4}(A^2 - 6I) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est inversible si le seul vecteur colonne X tel $AX = 0$ est $X = 0$.

Notons $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ les composantes de X, et x_i une composante de module maximum.

Si $AX = 0$ alors la composante d'indice i de AX est nulle.

Ainsi : $0 = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum\limits_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$ donc $|a_{ii}x_i| = \left|\sum\limits_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{ij}x_j| \leq |x_i| \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

Il en découle $|x_i| \left(|a_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right) \leq 0$. Mais $|a_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0$. On en déduit $|x_i| = 0$.

Or x_i est une composante de module maximum dans X. On a donc $X = 0$.

Conclusion : la matrice A est inversible.